RIVISTA

DI

MATEMATICA

EDITA

DA

G. PEANO

Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

Volume IV

TORINO

FRATELLI BOCCA

LIBRAI DI S. M.

1894

s
h
c
n
p
fi
p

c
r
s
s
(

e
c
s
c
r
l

RIVISTA DI MATEMATICA
Vol. IV. — 1894

ESERCIZI DI FISICA MATEMATICA

del Prof. Vito Volterra

Mi permetto di presentare ai lettori di questa Rivista alcune note sopra varii punti delle teorie fisico-matematiche. Questi articoli non hanno lo scopo di offrire sia risultati originali, sia ricerche condotte con metodi originali. Come il loro titolo lo denota essi hanno un fine molto più modesto, quale è quello di presentare alcune semplici applicazioni delle teorie che ordinariamente si svolgono in un corso di fisica matematica; ed è perciò che spero abbiano da riescire non inutili per chi cerchi delle esercitazioni sopra argomenti uditi nelle scuole.

I

Sulle funzioni potenziali.

1. Nella teoria del potenziale si dimostra che, se in un dato campo, ove non esistono masse, le tre derivate della funzione potenziale sono nulle, esse si conservano sempre nulle finchè non si attraversano delle superficie o degli spazii ove sono distribuite delle masse. Il teorema sussiste, tanto se il *campo* dato è una porzione qualunque dello spazio, quanto se esso è un pezzo di superficie così piccola come si vuole.

Questo teorema conduce alla conseguenza che, quando sopra un elemento di superficie si conosce il valore della funzione potenziale e della sua derivata rispetto alla normale alla superficie, la funzione stessa è determinata in tutta la parte dello spazio i cui punti possono collegarsi mediante una linea continua colla superficie, senza incontrare masse. Mediante una ben nota formula dovuta al Poisson si risolve il problema della costruzione effettiva della funzione potenziale quando si suppongono noti i valori di essa e della sua derivata rispetto alla normale nei punti di un pezzo di piano tanto piccolo quanto si vuole.

Questa notevole formula stabilisce un legame fra ogni funzione potenziale ed una funzione di *due* variabili complesse. Indipendentemente da questo resultato il Mehler (*) ed il Beltrami (**) hanno mostrato che i *potenziali simmetrici* possono connettersi colle funzioni di una variabile complessa, per mezzo di una formula la quale, senza ricorrere a sviluppi in serie (***), risolve il problema di costruire una funzione potenziale simmetrica quando se ne conosce il valore lungo una porzione dell'asse di simmetria.

I due resultati hanno relazione molto intima fra loro. Il ravvicinarli e farli dipendere in modo molto semplice dalle formule sul potenziale dell'ellissoide, che di solito si espongono in ogni corso sulla teoria del potenziale, credo che sia cosa non del tutto inutile, tanto più che la formula di Poisson suole ordinariamente ricavarsi dall'integrale generale dell'equazione del suono, ed in un corso sulla teoria del potenziale può riescire comodo di ottenerla invece direttamente valendosi soltanto di resultati già stabiliti nella detta teoria.

2. Partendo dalla funzione potenziale di un'ellissoide di rivoluzione intorno all'asse maggiore, e supponendo che due degli assi tendano a zero, si trova la funzione potenziale di una retta sotto la forma

$$V = \pi a \int_{\lambda_1}^{\infty} f\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{a^2 + \lambda}},$$

in cui $2a$ rappresenta la lunghezza della retta, x, y, z le coordinate del *punto potenziato,* riferite alla retta presa come asse z ed a due altre x e y ortogonali, supponendo l'origine nel punto di mezzo della retta stessa. Fra la densità in un punto della retta e la funzione f passa la relazione

$$\rho(z) = \pi f\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right). \tag{1}$$

λ è la radice positiva dell'equazione

$$H = 1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda} = 0.$$

(*) *Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern.* Math. Ann. XVIII Bd.

(**) *Sulle funzioni associate e specialmente di quelle della calotta sferica.* Mem. Acc. di Bologna, S. IV, T. IV.

(***) Vedi THOMSON und TAIT. *Handbuch der Theoretischen Phisik.* I Bd., II Th., § 546.

In modo analogo la funzione potenziale di un disco circolare di raggio b giacente nel piano $x\,y$ col centro nell'origine può mettersi sotto la forma

$$\mathrm{V}_1 = \pi b^2 \int_{\lambda_2}^{\infty} \varphi \left(1 - \frac{x^2+y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{\lambda}},$$

ove fra la densità $\rho_1(s)$ del disco in un punto distante dal centro di $z = b\sqrt{1-s}$ e la funzione φ passa la relazione

$$(2\,a) \qquad \rho_1(s) = \int_0^s \frac{\varphi'(\mu)}{\sqrt{s-\mu}}\, d\mu + \frac{\varphi(o)}{\sqrt{s}}$$

la cui relazione inversa è

$$(2\,b) \qquad \varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{\rho_1(\mu)\, d\mu}{\sqrt{s-\mu}}.$$

λ_2 è la radice positiva dell'equazione

$$\mathrm{H}_2 = 1 - \frac{x^2+y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda} = 0 \ (*).$$

Ora V diventa eguale a V_1 prendendo

$$i\,b = a \quad , \quad \varphi(s) = -\frac{1}{a}\,\mathrm{f}(s).$$

Infatti avremo

$$\mathrm{V}_1 = -\pi a^2 \int_{\lambda_2}^{\infty} -\frac{1}{a}\,\mathrm{f}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{(-a^2+\lambda)\sqrt{\lambda}}$$

e cambiando in questa formola λ in $a^2+\lambda$ si ottiene

$$(3) \qquad \mathrm{V}_1 = \pi a \int_{\lambda_1}^{\infty} \mathrm{f}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{a^2+\lambda}} = \mathrm{V}.$$

Dalle (2) segue

$$\rho_1(s) = -\frac{1}{a}\int_0^s \frac{\mathrm{f}'(\mu)\, d\mu}{\sqrt{s-\mu}} - \frac{1}{a}\frac{\mathrm{f}(o)}{\sqrt{s}}$$

e dalla (1)

$$\mathrm{f}(\mu) = \frac{1}{\pi}\,\rho\left(a\sqrt{1-\mu}\right)$$

$$\mathrm{f}'(\mu) = -\frac{a}{2\pi\sqrt{1-\mu}}\,\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right);$$

(*) Vedi Betti, *Teoria delle Forze Newtoniane*, pag. 85 e seguenti.

quindi

$$(4a)\qquad \rho_1(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^s \frac{\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right)}{\sqrt{s-\mu}\,\sqrt{1-\mu}}\,d\mu-\frac{1}{a\mu}\frac{\rho(a)}{\sqrt{s}}\,.$$

Dalla (2*b*) si deduce poi la relazione inversa alla presente.

$$(4b)\qquad \rho(s)=-a\int_0^{1-\frac{s^2}{a^2}}\frac{\rho_1(\mu)\,d\mu}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}-\mu}}$$

Osserviamo che, come la funzione

$$\frac{m}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

rappresenta la funzione potenziale di un punto di massa m e di coordinate x_1, y_1, z_1, così potremo dire che

$$\frac{m}{\sqrt{[x-(x_1+i\,x_2)]^2+[y-(y_1+i\,y_2)]^2+[z-(z_1+i\,z_2)]^2}}$$

è la funzione potenziale di una massa m concentrata nel punto immaginario dello spazio avente le coordinate $x_1+i\,x_2$, $y_1+i\,y_2$, $z_1+i\,z_2$.

Ciò premesso le formule (3), (4*a*), (4*b*) conducono alla seguente proposizione:

Teorema 1*a*. *Abbiansi tre assi* x, y, z *ortogonali, ed una massa distribuita sull'asse* z *dal punto* $-a$ *al punto* a *colla densità* $\rho(z)$ *(essendo* $\rho(z)=\rho(-z)$ *). La funzione potenziale di una tale massa è uguale a quella di una massa distribuita nei punti immaginarii del piano* $x\,y$ *di coordinate*

$$x=i\,r\cos\theta\quad,\quad y=i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\quad,\quad (a\geqq r\geqq 0)$$

colla densità superficiale

$$\rho_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^s \frac{\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right)}{\sqrt{s-\mu}\,\sqrt{1-\mu}}\,d\mu-\frac{1}{a\pi}\frac{\rho(a)}{\sqrt{s}}$$

essendo

$$s=1-\frac{r^2}{a^2}\,.$$

Teorema 1*b*. *Abbiasi una massa distribuita nei punti del cerchio di raggio b situato nel piano xy col centro nell'origine, colla densità superficiale $\rho_1(r)$. Questo disco avrà la stessa funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z di coordinate*

$$iz \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità

$$\rho = -ib\int_0^s \frac{\rho_1(\mu)\,d\mu}{\sqrt{s-\mu}}$$

essendo

$$s = 1 - \frac{z^2}{b^2}.$$

In particolare, prendendo successivamente le densità ρ e ρ_1 costanti ed eguali a K, i teoremi precedenti divengono:

Teorema 2*a*. *La funzione potenziale di una massa di densità costante K distribuita sull'asse z dal punto $-a$ al punto a è uguale alla funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii del piano xy di coordinate*

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0) \; ,$$

colla densità superficiale

$$\rho_1 = -\frac{K}{\pi\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Teorema 2*b*. *La funzione potenziale di un disco omogeneo di densità K di raggio b situato nel piano xy col centro nell'origine, è uguale alla funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z di coordinate*

$$iz \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità lineare

$$\rho = -2iK\sqrt{b^2-z^2}.$$

Un'altra conseguenza del teorema 1*a* è la seguente.

Teorema 3*a*. *La funzione potenziale di due punti di masse* $+1$ e -1 *situati sull'asse z alle distanze rispettive* $+a$ e $-a$ *dall'origine, è eguale alla funzione potenziale di un doppio strato distribuito nei punti immaginari del piano xy di coordinate*

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0)$$

col momento

$$\mu = -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Supponiamo infatti dapprima distribuito sull'asse z dal punto $-a$ al punto a una massa omogenea M_1 di densità $-K$. Essa avrà la stessa funzione potenziale della massa M_1' di densità superficiale

$$\rho_1 = \frac{K}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}$$

distribuita nei punti di coordinate

$$x = i\, r \cos\theta \quad , \quad y = i\, r \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = 0 \qquad (a \geqq r \geqq 0)\,.$$

Distribuiamo poi sull'asse z una massa M_2 della densità $+K$ dal punto $-a+\varepsilon$ al punto $a+\varepsilon$. Ad essa corrisponderà una massa M_2' distribuita nei punti di coordinate

$$x = i\, r \cos\theta \quad , \quad y = i\, r \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = \varepsilon \qquad (a \geqq r \geqq 0)$$

colla densità superficiale

$$\rho_2 = -\frac{K}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}\,.$$

Prendiamo l'insieme delle due masse M_1 e M_2 e facciamo tendere ε a zero, mentre $K\varepsilon$ si conserva eguale ad 1. Otterremo al limite sull'asse z due punti di masse $+1$ e -1 alle distanze $+a$ e $-a$ dall'origine. Prendendo invece l'insieme delle due masse M_1' e M_2' al limite si otterrà un doppio strato di momento

$$-\frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}\,.$$

Il teorema resta quindi dimostrato.

In modo del tutto analogo partendo dal teorema (2 b) relativo al disco omogeneo e passando da esso al caso di un anello circolare si trova il teorema seguente:

Teorema 3 b. *Un anello circolare di densità eguale ad* 1 *situato nel piano* xy *col centro nell'origine ha la stessa funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse* z

$$i\, z \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità

$$-\frac{2\, i\, b}{\sqrt{b^2 - z^2}}\,.$$

3. Premessi questi teoremi, denotiamo per semplicità con m la massa distribuita sull'asse z secondo l'ipotesi fatta nel teorema $2a$ e con m_1' la massa equivalente distribuita nei punti immaginarii del piano $x\,y$ e analogamente indichiamo con m_2 l'insieme dei due punti materiali considerati nel teorema $3a$ e con m_2' il doppio strato equivalente distribuito nei punti immaginarii del piano $x\,y$. Abbiasi un sistema qualunque di masse che supporremo esterne al segmento dell'asse compreso fra $z = -a$ e $z = +a$. Sia V la funzione potenziale delle masse m. Pel teorema di Gauss il potenziale P_1 di m su m_1 sarà eguale al potenziale di m su m_1'. Ora il potenziale di m su m_1 si calcola immediatamente e si trova

$$P_1 = K\int_{-a}^{a} V(0,0,z)\,dz.$$

Per avere il potenziale su m_1' bisognerà prendere la V nei punti del piano $x\,y$ cioè $V(x,y,0)$ e prolungarla per i valori complessi di x e di y. Otterremo così la funzione di due variabili complesse

$$V(x+i\xi,\,y+i\zeta\,,0) \tag{5}$$

tale, che

$$V(x+i\xi\,,x+i\zeta\,,0)_{\xi=0,\zeta=0} = V(x\,,y\,,0)\,.$$

La (5) dà i valori della funzione potenziale delle masse m nei punti immaginarii del piano $x\,,y$; quindi otterremo immediatamente:

$$P_1 = -\frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a V(i\,r\cos\theta\,,i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\,,0)\,\frac{i\,r\,.\,i\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}} =$$

$$= \frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a V(i\,r\cos\theta\,,i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\,,0)\,\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,.$$

Eguagliando i due valori trovati per P_1 si ha

$$\int_{-a}^{a} V(0,0,z)\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a V(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\,,0)\,\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,,$$

e derivando i due membri rispetto ad a

$$V(0,0,a) + V(0,0,-a) =$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{d}{da}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a V(i\,r\cos\theta\,,i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\,,0)\,\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,.$$

In modo analogo prendiamo successivamente il potenziale P_2 delle masse m su m_2 e m_2', tenendo conto del modo con cui vanno calcolati i potenziali sui doppi strati otterremo

$$P_2 = V(0,0,a) - V(0,0,-a),$$

$$(6) \qquad P_2 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{i\,r\,.\,i\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

ove V'_z rappresenta la derivata parziale di V rapporto a z; funzione che dovremo supporre prolungata anch'essa per i valori complessi delle variabili x ed y.

Eguagliando fra loro i due valori trovati per P_2, abbiamo

$$(7) \qquad V(0,0,a) + V(0,0,-a) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Dalle (6) e (7) segue

$$V(0,0,a) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{da}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Cambiando l'origine nel piano x, y e ponendo z in luogo di a la formula precedente dà luogo all'altra

$$(A) \qquad V(x, y, z) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z V(x+i\,r\cos\theta, y+i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{z^2-r^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z V'_z(x+i\,r\cos\theta, y+i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{z^2-r^2}},$$

la quale è valida ammettendo che la parallela all'asse z che dal punto $x, y, -z$ va al punto x, y, z sia esterna alle masse m.

Questa formula (*) scioglie evidentemente la questione di determinare una funzione potenziale $V(x, y, z)$ quando si conosce sopra un pezzo di piano σ esterno allo spazio occupato dalle masse, il suo valore e quello della sua derivata rispetto alla normale al piano σ. La soluzione si otterrà prendendo gli assi x, y, z in modo che il pezzo di piano σ appartenga al piano x, y. Bisognerà quindi considerare le funzioni note $V(x, y, 0)$, $V'_z(x, y, 0)$ e prolungarle pei valori complessi delle variabili x e y; finalmente si applicherà la formula (A). In tal modo si determineranno i valori di $V(x, y, z)$ nella porzione del cilindro S simmetrico rispetto al piano xy, avente per base σ entro il quale non capitano masse: ma una volta determinata la V entro S si potrà prendere un pezzo di piano arbitrario σ' contenuto in S. In esso conosceremo il valore di V e della derivata rispetto alla normale, quindi potremo ripetere per σ' le stesse operazioni già eseguite per σ e così procedendo di seguito potremo prolungare la funzione potenziale V finchè sarà possibile.

Come abbiamo detto fin da principio la formula (A) stabilisce un legame fra le funzioni potenziali e le funzioni di *due* variabili complesse. Il teorema a cui si perviene mediante tale osservazione è il seguente.

Teorema 4. *Siano* $F(\zeta_1, \zeta_2)$ *e* $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$ *due funzioni arbitrarie delle variabili complesse* ζ_1 *e* ζ_2 *reali per i valori reali di* ζ_1 *e* ζ_2.

Sia σ *un campo tale che per tutti i valori reali di* x *e* y *interni a* σ *le funzioni*

$$F(\zeta_1, \zeta_2 \mid x, y) \quad , \quad \Phi(\zeta_1, \zeta_2 \mid x, y)$$

si comportano regolarmente ed oltre a ciò i raggi di convergenza dei detti elementi siano sempre superiori ad R. *In tale ipotesi, posto*

$$\zeta_1 = x + i r \cos\theta \quad , \quad \zeta_2 = y + i r \operatorname{sen}\theta,$$

la funzione

(A')
$$V(x, y, z) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z F(x + i r\cos\theta, y + i r \operatorname{sen}\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \Phi(x + i r\cos\theta, y + i r \operatorname{sen}\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

gode delle seguenti proprietà:

(*) La formula (A) è la formula data da Poisson nel § (8) della sua Memoria *Sur les équations aux différences partielles*. Mem. de l'Acad. des Sciences, T. III.

1°) *entro il cilindro* S *simmetrico rispetto al piano* $x\,y$ *avente per base* σ *e per altezza* 2R *è reale finita e continua insieme alle sue derivate;*

2°) *entro* S *soddisfa l'equazione differenziale*

$$\Delta^2 \mathrm{V} = 0$$

3°) *sul pezzo di piano* σ *si ha*

$$\mathrm{V}(x\,,y\,,0) = \mathrm{F}(x\,,y) \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)_{z=0} = \Phi(x\,,y)\,.$$

Per dimostrare direttamente questo teorema, cominciamo dal considerare la funzione

$$\mathrm{f}(x\,,y\,,z) = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} d\theta \int_0^z \mathrm{F}(x + i\,r\cos\theta,\, y + i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\frac{r\,d\,r}{\sqrt{z^2 - r^2}}\,.$$

Per mezzo di una integrazione per parti, avremo

$$\mathrm{f}(x,y,z) = z\,\mathrm{F}(x,y) + \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_1}\,i\cos\theta + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_2}\,i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\sqrt{z^2 - r^2}\,d\,r$$

e quindi

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial z} = \mathrm{F}(x\,,y) + \frac{z}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_1}\,i\cos\theta + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_2}\,i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{d\,r}{\sqrt{z^2 - r^2}}\,.$$

Da questa formula segue

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{dz^2} = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_1}\,i\cos\theta + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_2}\,i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{d\,r}{\sqrt{z^2 - r^2}} +$$
$$\frac{z}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} d\theta\,\frac{d}{dz}\int_0^z \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_1}\,i\cos\theta + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_2}\,i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{d\,r}{\sqrt{z^2 - r^2}}\,.$$

Mediante l'integrazione per parti rispetto a θ, si ha

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_1}\,i\cos\varsigma + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_2}\,i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{d\,r}{\sqrt{z^2 - r^2}} =$$
$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \zeta_1^2}\mathrm{sen}^2\,\theta + 2\,\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \zeta_1\,\partial \zeta_2}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \zeta_2^2}\cos^2\theta\right)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

e mediante integrazione per parti rispetto ad r

$$\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} =$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \text{arco sen} \frac{r}{z}\right]_0^z -$$

$$\int_0^z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} \cos^2\theta - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2} \operatorname{sen}^2\theta\right) \text{arco sen} \frac{r}{z}\, dz.$$

onde

$$\frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{dz} \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} \operatorname{sen}^2\theta - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2} \cos^2\theta\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

quindi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}.$$

Ora

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varsigma \int_0^z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}},$$

dunque

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Analogamente ponendo

$$\text{(8')} \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varsigma \int_0^z \Phi(x + ir\cos\varsigma, y + ir\operatorname{sen}\varsigma) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}},$$

avremo

$$\text{(9')} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Phi(x, y) + \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varsigma \int_0^z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_1} i \cos\varsigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\varsigma\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$\text{(11')} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Dalla (A') segue

$$V(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} + \varphi$$

quindi

$$\Delta^2 V = 0$$

e a cagione delle (9) e (8')

$$V(x, y, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} + \varphi_{z=0} = F(x, y).$$

Dalle (10) e (9') si ha poi

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=0} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \Phi(x, y).$$

È facile finalmente riconoscere che V è reale. Infatti dalla (A') segue che mutando θ in $\theta + \pi$, V non deve mutare, e questo cambiamento equivale a mutare nella (A') stessa, i in $-i$.

4. Procediamo per i potenziali simmetrici, in modo analogo a quello che abbiamo tenuto precedentemente nel caso dei potenziali generali. Chiamiamo m_1 la massa distribuita nell'anello secondo il teorema $3b$, ed m_1' la massa equivalente distribuita nei punti immaginarii dell'asse z. Il potenziale sopra m_1 di un sistema di masse m distribuite simmetricamente rispetto all'asse z, sarà eguale al potenziale di m sopra m_1'.

Denotiamo con $V(r, z)$ la funzione potenziale della massa m. Il potenziale di m sopra m_1 sarà

$$2\pi b V(b, 0)$$

ed il potenziale sopra m_1' si otterrà prolungando i valori di $V(r, z)$ per valori immaginarii di z, ed avremo

$$-\int_{-b}^{b} V(0, iz) \frac{2ib}{\sqrt{b^2 - z^2}} i\, dz$$

quindi eguagliando questi due valori del potenziale risulterà

$$V(b, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{b} V(0, iz) \frac{dz}{\sqrt{b^2 - z^2}}$$

da cui si deduce immediatamente

$$V(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} V(0, z + is) \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}. \tag{12}$$

Separando in $V(0, z+is)$ la parte reale dalla parte immaginaria, si otterrà

$$V(0, z+is) = v(z, s) + i\, w(z \,.\, s) = f(z+is)$$

d'onde

$$\text{(B)} \qquad V(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^r v(z, s) \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} \,.$$

Questa formula dà una relazione fra una funzione potenziale simmetrica $V(r, z)$ e la parte reale della funzione di variabile complessa che è reale sull'asse reale z ed assume su questo gli stessi valori di $V(r, z)$ per $r = 0$. La formula precedente si può invertire e si otterrà

$$\text{(B}_1\text{)} \qquad v(z, s) = \frac{d}{dr}\int_0^r \frac{V(t, z)}{\sqrt{r^2 - t^2}}\, t\, dt \,.$$

Passiamo a considerare la funzione associata alla funzione $v(r, z)$ e cerchiamo di esprimerla mediante la funzione di variabile complessa $f(z+is)$. A tal fine immaginiamo due dischi omogenei di densità $-K$ e K e di raggio b normali all'asse z i cui centri sono sopra questo asse ed hanno le coordinate z e $z+h$. Il potenziale delle masse m sopra questi due dischi sarà dato da

$$2\pi\int_0^b K\, r\, V(r, z+h)\, dr + 2\pi\int_0^b - K\, r\, V(r, z)\, dr =$$

$$2\pi\int_0^b K\left\{V(r, z+h) - V(r, z)\right\} r\, dr \,.$$

Ma tenendo presente il teorema $2b$, lo stesso potenziale potrà esprimersi ancora sotto la forma

$$\int_{-b}^b V(0, z+h+is)(-2\, i\, K\sqrt{b^2-s^2})\, i\, ds +$$

$$\int_{-b}^b V(0, z+is)(2\, i\, K\sqrt{b^2-s^2})\, i\, ds =$$

$$2\int_{-b}^b K\left\{V(0, z+h+is) - V(0, z+is)\right\}\sqrt{b^2-s^2}\, ds$$

onde avremo, posto $K = \dfrac{1}{h}$

$$\int_0^b \frac{V(r, z+h) - V(r, z)}{h}\, r\, dr = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^b \frac{V(0, z+is+h) - V(0, z+is)}{h}\sqrt{b^2-s^2}\, ds.$$

Facendo tendere h verso zero, si otterrà

$$\mathrm{W}(b\,,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{\partial\,\mathrm{V}(0\,,z+i\,s)}{\partial z}\sqrt{b^2-s^2}\,d\,s$$

in cui $\mathrm{W}(r\,,z)$ denota la funzione associata alla $\mathrm{V}(r\,,z)$. La formula precedente si potrà ancora scrivere con facili trasformazioni

$$\text{(12')}\qquad \mathrm{W}(r\,,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}\mathrm{V}(0\,,z+i\,s)\,\frac{s\,d\,s}{\sqrt{r^2-s^2}}$$

ovvero

$$\text{(C)}\qquad \mathrm{W}(r\,,z)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{r}w(z\,,s)\,\frac{s\,d\,s}{\sqrt{r^2-s^2}}$$

che è appunto la formula che cercavamo.

Le due formule (B) e (C) risolvono il problema: *Dati i valori di una funzione potenziale simmetrica lungo un segmento dell'asse di simmetria esterno alle masse attraenti, determinare la funzione stessa e la funzione associata in punti esterni all'asse appartenenti ad un cilindro circolare retto (avente per asse il segmento dato) entro il quale non si trovano masse attraenti.* Basterà perciò prolungare i valori dati della funzione potenziale simmetrica per valori complessi dell'argomento; quindi applicare le formule (B) e (C).

La géométrie des masses.

Monsieur Haton de la Goupillière vient de publier dans la *Revue générale des Sciences pures et appliquées* (15 juin 1893) un article fort intéressant sur « la géométrie des masses ». Nous allons présenter une analyse succinte de cet article.

En dehors des grandeurs considérées en Géométrie (longueur, surface, volume, angle), on considère en Mécanique trois nouveaux éléments irréductibles, le *temps*, la *force*, la *masse*.

L'étude des mouvements en relation seulement avec le temps constitue la *Cinématique* (Ampère).

L'étude des forces, indépendamment du temps et de la masse, forme la *Statique*.

Enfin l'étude des masses, conjoinctement aux notions de géométrie, et en dehors de toute considération de temps et de force, constitue la *géométrie des masses*.

M[r] de la Goupillière est un de ceux qui se sont le plus occupés avec cette branche des Mathématiques (*Nouvelle théorie de la géométrie des masses*, thèse de doctorat, 1857; *Premier et Second Mémoire sur la Géométrie des masses*, Journal de l'École Polytechnique, XXXVII cahier, etc.).

La notion de masse qui entre chez ces recherches peut, au besoin, être remplacée par celle, plus abstraite, de coefficients numériques adjoints d'une manière quelconque aux divers points de l'espace, d'une surface, d'une ligne, etc. (masses positives et négatives).

Les théories qui constituent aujourd'hui la Géométrie des masses consistent dans l'étude des intégrales de la forme $\Sigma\, m\, f(x, y, z)$, étendues a l'ensemble d'un système matériel quelconque, et ne différant, d'un cas à l'autre, que pour la nature de la fonction caractéristique. Elles se rapportent soit à la recherche des centres de gravité et des moments d'inertie, soit du potentiel. Les intégrales considérées dans

ses recherches ont diverses formes, telles que: $\Sigma\, m\, x$, pour les centres de gravité,

$$\Sigma\, m\, x^2\,,\quad \Sigma\, m\,(x^2+y^2)\,,\quad \Sigma\, m\,(x^2+y^2+z^2)$$
$$\Sigma\, m\, m'\,[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]$$

pour les moments d'inertie, et $\Sigma \dfrac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ pour le potentiel, etc.

Parmi les recherches relatives aux centres de gravité, commencées par Archimède, on peut citer le théorème de Guldin (généralisé par M. Koenigs), la méthode des tangentes de Tschirnhausen et Lhospital, les propositions de Giulio, Schellbach et Lhuillier sur les figures sphériques, la théorie de Steiner sur les centres de gravité de courbure, celle des surfaces de carène, les théorèmes remarquables de Waring, Newton, Chasles, Liouville, Duhamel, Humbert sur les surfaces algébriques de degré quelconque, etc. Mr de Goupillière nomme ensuite un grand nombre d'auteurs qui se sont occupés avec la théorie des centres de gravité. Nous relevons dans cette liste les noms de Bellavitis, Brianchon, Clifford, Collignon, Dupin, Hausen, Pettersen, Ribaucour, Sturm, etc. On aurait pu ajouter à ces noms ceux de Möbius (*Barycentrisches Calcul*) et de Grassmann (*Ausdehnungslehre*).

La théorie des moments d'inertie presente plus d'unité que celle des centres de gravité. On peut citer les recherches de Poinsot (ellipsoïde d'inertie), Mac-Cullagh (ellipsoïde de gyration), Ampère, Binet (surfaces homofocales enveloppées par la triple série des plans principaux), les surfaces des ondes de Townsend, Dussaude et de Peslin, le travaux de Lagrange, Battaglini, Chelini, Fouret, Reye, Yung, etc.

La théorie du potentiel, explorée d'abord par Green, Chasles, Gauss, Lamé, etc., est plus connue que les précédentes et Mr de la Goupillière n'en donne pas la bibliographie.

Cypar. Stephanos.

A difesa della seconda edizione degli « Elementi d'Euclide »

Altra risposta al prof. Lazzeri.

Per maggior brevità non tratterò ora la questione dell'equivalenza, riserbandomi di far ciò in un articolo a parte; nel quale, dopo d'avere esteso a tutte le grandezze geometriche le dimostrazioni delle proposizioni E ed F, le quali sono state oggetto di critica, dimostrerò che il processo seguìto nella proposizione E per decomporre in parti rispettivamente uguali le parti non comuni di due poligoni uguali, aventi una parte comune, non dà mai luogo ad un numero infinito di operazioni. Talchè esso non solo è sempre giusto, ma è applicabile, come vedremo, oltrechè ai poligoni, ai cerchi, alle superficie chiuse da ellissi, ai poliedri, ai poligoni sferici, ecc.

Tornerò invece sopra due punti dell'altra questione riguardante la fusione della geometria piana colla solida, i quali non furono forse ben chiariti nel precedente mio articolo. E, in primo luogo, dirò che non ho mai voluto far dipendere, com'è naturale, tutta la fusione da una questione di postulati. Dissi, che se la fusione, come ne ha dato prova anche il signor Lazzeri, vien fatta ammettendo il postulato del diedro, allora essa è, in quel punto s'intende, scientificamente un errore; e si riduce anzi ad un vero artifizio, allo scopo di poter comprendere in un solo enunciato le proprietà dell'angolo e quelle analoghe del diedro. La proprietà del diedro di essere rovesciabile è un teorema e non un postulato; dunque essa dev'essere collocata al suo posto fra i teoremi. E allora è evidente, che lo studio dei diedri dovrà farsi precedere da quello degli angoli, da quello dei triangoli, e infine dalle nozioni di retta e piano perpendicolari. Logicamente adunque questi due studi, degli angoli piani e degli angoli diedri, non si possono tenere uniti; onde il mandarli di pari passo, come vuole il nostro critico, allo scopo di « risparmiare ai giovani tempo e fatica », sarà sempre una cosa fatta ad arte, la quale non contribuirà certamente a dare ad essi una vera e propria educazione scientifica. Veda quindi da ciò il signor Lazzeri, che, poste le cose in tali termini, non è più questione di non voler esperimentare un metodo piuttosto che un altro; si tratta invece di errori, sui quali, se non è nocivo, è assolutamente inutile fare delle esperienze.

Sul postulato dell'angolo, il critico esimio se la cava, secondo suo solito, mediante considerazioni molto vaghe; invece di farmi sapere, com'io gli

aveva chiesto, se la rovesciabilità dell'angolo è veramente un postulato o un teorema. Avrebbe preso forse una grossa cantonata, quando nella sua recensione asserì « che dalla possibilità di rovesciare un segmento si può molto facilmente dedurre la possibilità di rovesciare un angolo e viceversa? »

E veniamo ora a ciò che il professore egregio chiama *deplorevole equivoco*. Io dissi che il De Paolis erasi dichiarato *didatticamente* contrario alla fusione. Ebbi torto di non aggiungere subito *in un primo studio della geometria;* ma sembrami che ciò poteva benissimo essere sottinteso: perchè tanto nella prefazione al primo libro d'Euclide, quanto nell'ultimo mio articolo, la mia opposizione alla fusione si è sempre ristretta ai primi elementi di geometria; e, come già dissi, nei limiti, più o meno, dei primi quattro libri d'Euclide. Del resto non credo che le mie parole debbano ritenersi esagerate, se penso che il De Paolis pubblicò il suo libro, quando nel Ginnasio inferiore era obbligatoria la Geometria intuitiva, e che egli era tra coloro che volevano mantenuto tale insegnamento; ed ancor più, se penso che il libro stesso è stato scritto, come dice il nostro critico, « con un indirizzo puramente scientifico, e che l'autore lo riteneva più adatto a servire di guida agli insegnanti che agli studenti ».

Non a me dunque deve essere rivolta la taccia di sconvenienza verso il morto illustre: la sconvenienza la commette chi riduce a questione personale una discussione, la quale avrebbe dovuto mantenersi nel sereno campo didattico e scientifico.

Riguardo poi alla lettera scritta dal professore ch'io chiamai amicissimo del De Paolis e dal critico egregio riprodotta, mi piace far osservare, che essa è tutta gratuita là dove dice « ma da questa storia all'asserzione che anco nei gradi più elevati d'istruzione liceale, il libro sarebbe stato didatticamente inservibile, mi par che ci sia una differenza sostanziale ». Se, come già dichiarai l'altra volta, io stimo cosa ben fatta cominciare lo studio della geometria solida avanti il quinto libro d'Euclide, ed esso fa parte del programma destinato al secondo corso liceale; vuol dire ch'io ammetto che si possa studiare la geometria solida al second'anno di liceo, e quindi, secondo il gusto di chi insegna, può il libro del De Paolis servire anche all'istruzione liceale. Poi osserverò, che la storia, cui sopra s'allude, mi fu narrata dallo stesso professore, dopo che egli erasi trovato meco perfettamente d'accordo nella questione tanto dibattuta.

Dopo la fusione, il critico esimio, tornando a censurare le proposizioni I, XII, XXII del primo libro, mi chiama difensore d'Euclide; e l'altra volta invece aveva detto ch'io rivedevo le bucce ad Euclide. Potrei dimostrargli, che tali proposizioni sono facilmente giustificabili colle proprietà della retta e della circonferenza di dividere il piano in due parti; ma è assai meglio non perdere più tempo. Dirò soltanto che, difendendo in questo punto l'Euclide, ho difeso anche l'opera del prof. Betti; il quale è appunto l'autore della nota che si trova alla fine della proposizione XXII. È quindi opportuna la domanda: come va che il sig. Lazzeri mostra d'avere tanto rispetto per un morto illustre, e non ha alcun riguardo per un altro morto ancor più illustre?

Entrando poi a parlare dell'uso d'Euclide nelle scuole, l nostro critico dice: « L'obbligo d'usare Euclide nei Licei imposto nel 1867, credo sia stata cosa provvidenziale... Ora in 26 anni le cose sono cambiate e molto. Ormai è entrato nella coscienza di tutti, che le proprietà geometriche devono essere insegnate senza alcun sussidio dell'algebra e dell'aritmetica ».

Benissimo!... Ed è proprio qui ch'io voleva cogliere il signor Lazzeri. E prima di tutto gli domanderò: l'addebito di ricorrere al numero collo scopo di dimostrare proprietà geometriche, a chi è diretto? ad Euclide o agli autori moderni? Ad Euclide, no sicuramente; perchè è appunto da lui che noi abbiamo appreso il metodo puro di trattare la geometria; dunque l'addebito va agli autori moderni. Difatti: senza punto curarmi degli imitatori di Legendre, e parlando anzi di coloro che hanno seguìto il metodo Euclideo, dirò che sono appunto gli autori moderni, i quali hanno fatto dipendere dal numero il concetto d'equivalenza; mentre si dimostra, come io ho già fatto (*) che tal concetto è indipendente dal numero, finito o no, di parti rispettivamente eguali, onde due grandezze possono decomporsi. E sono pure gli autori moderni che continuano a far dipendere dal numero anche il concetto di proporzione. È facile persuadersi di ciò esaminando l'autore che ha riscosso più approvazioni di tutti: voglio dire il De Paolis. Egli infatti definisce la proporzione così: « Quattro grandezze, prese in un certo ordine, fanno proporzione, se la seconda e la quarta sono contenute sempre uno stesso numero di volte in due grandezze equimultiple della prima e della terza, secondo qualunque numero ».

Qui è evidente che non solo il numero serve ad esprimere quante volte la seconda e la quarta grandezza sono contenute, con resto o senza, nelle equimultiple della prima e della terza; ma è l'uguaglianza di due numeri che stabilisce il concetto di proporzione. Quindi è una relazione numerica che serve a definirne una geometrica. Euclide invece, il quale dopo tanti secoli continua ancora ad esserci maestro, volendo definire una relazione geometrica non ricorre mai al numero, ma bensì ad un'altra relazione geometrica; ed infatti la sua definizione di proporzione suona press'a poco in questi termini: Quattro grandezze, in un determinato ordine, fanno proporzione, quando le equimoltiplici, secondo qualunque numero, della prima e terza sono maggiori, eguali o minori rispettivamente delle equimoltiplici, pure secondo qualunque numero, della seconda e quarta grandezza. Ciò può chiarirsi e rendersi più intelligibile così: se A' e C' sono arbitrarie equimoltiplici di due grandezze omogenee A e C, B' e D' altre arbitrarie equimoltiplici di due grandezze omogenee B e D, la relazione:

$$A' \gtreqless B' :: C' \gtreqless D'$$

dà sempre luogo all'altra:

$$A : B :: C : D;$$

(*) Vedasi il mio opuscolo: *Ancora a proposito dell'equivalenza e di altre questioni geometriche.* Firenze, Stab. tip. Fiorentino, 1893.

e viceversa. Quest'ultima relazione dicesi proporzione delle quattro grandezze *A*, *B*, *C*, *D* considerate nell'ordine con cui sono scritte. Da ciò è manifesto, che Euclide passa al concetto di proporzione servendosi delle relazioni di maggiore, eguale o minore.

Tale concetto che, senza dubbio, rivela nel Geometra greco un acutissimo ingegno, il nostro critico osa chiamarlo contorto e laborioso. Ed egli intanto, non sapendo far nulla di meglio, ha pensato bene di schivare la difficoltà trattando le proporzioni fra grandezze geometriche solamente per mezzo del numero; e poi ci viene a dire, che ormai è entrato nella coscienza di tutti che le proprietà geometriche devono essere insegnate senza alcun sussidio dell'Algebra e dell'Aritmetica. Bravo davvero!...

E non si obbietti che nella definizione surriferita c'è l'idea di numero intero, perchè quest'idea è solamente nel concetto di moltiplice e di equimoltiplice. Ora è chiaro che ciò non costituisce difetto; perchè del numero intero, esprimente cioè collezioni di cose eguali o simili, non si può fare a meno; e senza di esso non esisterebbe non solamente la geometria Euclidiana, ma neppure quella di posizione. Per rendersi ragione di ciò basta pensare ai diversi problemi che la geometria risolve: per esempio al problema della divisione d'un segmento e d'un angolo in parti uguali, alla somma degli angoli interni di un poligono, ecc. ...

In seguito alle parole surriferite, il nostro critico poi aggiunge: « quello che era buono 26 anni fa, non è più buono ora; e non è più possibile migliorare Euclide rimpolpettandolo: bisogna servirsi dei materiali, ma costruire di nuovo ». E va bene: concedo che bisogni e che si possa anche ricostruire; ma con quali mezzi? Con quelli forse di cui ha dato prova il signor Lazzeri, confondendo cioè teoremi con postulati (*), e riuscendo a bandire dalla geometria il concetto di proporzione? Proprio come se esso non appartenesse che alla sola aritmetica? Oh, povera Geometria, così costrutta!

Sembrami poi che ad attaccare oggi l'Euclide, dopo tanti secoli di esistenza, non ci voglia nè un gran merito nè un gran coraggio. È naturale che la Geometria abbia fatto, in tanto tempo, anche nel campo elementare molti e notevoli progressi, e che quindi il testo del Geometra greco risulti ora incompleto. In ogni modo però, se è vero che esso è inferiore ai trattati moderni per copia di cognizioni, è anche vero che n'è superiore per chiarezza, semplicità e rigore di metodo. Onde io sono fermamente convinto, che il testo medesimo, specialmente come libro educativo da adottarsi nelle scuole classiche, abbia sempre sugli altri libri i suoi vantaggi. La qualcosa credo abbiano pensato anche il prof. Betti, che mi dette l'incarico di curare la seconda edizione, ed il prof. Dini, il quale mi scrisse esortandomi ad accettare. Essi adunque non credevano, come l'esimio signor Lazzeri, che la geometria d'Euclide fosse oggi diventata cadavere.

(*) Vedansi gli *Elementi di Geometria* dei prof. G. Lazzeri e A. Bassani, Livorno, 1891: pag. 12, Post. VII, 3°; pag. 17, Post. IX; pag. 34, Post. X, 1°.

Tutto ciò parmi più che sufficiente a dimostrare, che il nostro critico non ha alcun diritto di tacciare i professori delle scuole classiche, i quali non pensano come lui, di pigrizia e d'inesperienza, o di voler fare come facevano i loro nonni e bisnonni. Quel che noi facciamo, abbiamo ormai dato prove di saperlo non meno di lui; e in ciò non altro ci guida, che la salda coscienza di compiere il nostro dovere.

Ora venga pure il giudizio del pubblico intelligente.

Firenze, 31 novembre 1893.

M. Gremigni.

A proposito della nota

« Rettificazione di alcune inavvertenze in un moderno trattato di geodesia »

Il Chiar. Sig. Prof. Vincenzo Reina, della Scuola degli Ingegneri in Roma, ci ha inviato un elenco stampato di correzioni ed aggiunte ai *Fondamenti di Geodesia* di ENRICO PUCCI, che si trovarono manoscritte di propria mano nella copia dell'opera posseduta dall'autore. Da quest'elenco appare che la prima svista accennata nella nostra nota, della quale sopra scrivemmo il titolo, era già stata riconosciuta dal compianto prof. Pucci e corretta. L'egregio Sig. Prof. Vincenzo Reina ci prega di far ciò conoscere ai lettori della *Rivista*; di buon grado soddisfiamo a questo desiderio che attesta dell'amichevole riverente memoria che il Prof. Reina serba per il suo predecessore, e dell'animo buono di questi che gli seppe procurare sì delicati sentimenti.

Torino, 16, I, 1894.

Ottavio Zanotti Bianco.

Sulle derivate apparenti.

Nota di GIULIO ASCOLI, *a Milano.*

Se io derivo la quantità y in quanto essa *dipende* dalla variabile indipendente x formo *la derivata totale* di y rispetto ad x, la quale suole indicarsi di preferenza col simbolo $\frac{dy}{dx}$, nella ipotesi che l'elemento y sia funzione soltanto della grandezza x. Se all'incontro l'ente y dipende da m $(\geqq 2)$ variabili x, z,... fra loro indipendenti *la derivata totale* di y rispetto ad x suole rappresentarsi da molti con la notazione $\frac{\partial y}{\partial x}$ e chiamarsi dai più in modo, secondo me, poco opportuno *la derivata parziale* di y rispetto ad x. Adunque, ciascuno dei due simboli $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{\partial y}{\partial x}$ accenna alla derivata dell'ente y in quanto dipende dalla variabile indipendente x. Dal primo però arguisco che la funzione y dipende da un solo elemento che può mutare ad arbitrio, mentre il secondo afferma che il numero di tali elementi non è inferiore a due.

Ciò premesso, si abbino le relazioni $y = f(x_1, x_2)$, $x_1 = l(x)$, $x_2 = m(x)$, laddove tra le grandezze y, x_1, x_2, x non vi è altro legame. Di conseguenza, possiamo scrivere la relazione:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx},$$

che suole enunciarsi così:

Se y *è una funzione delle variabili* x_1 *ed* x_2 *e se ciascuna di queste ultime dipende dall'ente* x, *ne avviene che la derivata totale di* y *rispetto ad* x *è uguale alla derivata parziale della grandezza* y *rispetto ad* x_1 *nella derivata totate di* x_1 *rispetto ad* x *più il termine dedotto dal precedente scambiando la quantità* x_1 *con l'altra* x_2.

È facile però l'avvertire che questo enunciato non è esatto.

Infatti, *la derivata parziale* della funzione y rispetto ad x_1 si ot-

tiene derivando y in quanto dipende da x_1. Ora, essendo $x_2 = m(x)$, $x_1 = l(x)$, ne consegue che la variabile x_2 dipende da x_1 e che la grandezza cui si accenna nel teorema precedente col simbolo $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ non è la derivata parziale nel significato di poc'anzi.

Nel teorema detto or ora la derivata parziale di y rispetto x_1 si ottiene fingendo per un momento che le due variabili x_1 ed x_2 sieno tra loro indipendenti e formando quindi mercè l'espressione $f(x_1, x_2)$ gli enti $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}$. Ma, è manifesto che questa finzione, siccome del tutto non conforme al vero, è assai poco opportuna. D'altra parte, si può farne a meno accettando il concetto di derivata apparente.

Io derivo la variabile y *apparentemente rispetto all'elemento* x, *se, osservando soltanto al modo mercè il quale la funzione* y *è espressa formalmente mediante la quantità* x, *derivo rispetto a quest'ultima applicando le note regole di derivazione delle funzioni esplicite di una sola variabile.*

La derivata apparente di y rispetto ad x si indicherà con la notazione

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

L'ultima eguaglianza va dunque scritta così:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{dx} + \left(\frac{dy}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dx},$$

ed enunciata nella maniera che segue.

Se l'elemento y *è una funzione delle variabili* x_1 *ed* x_2, *laddove ciascuna di queste ultime dipende dalla variabile indipendente* x, *la derivata totale dell'elemento* y *rispetto ad* x *è uguale alla derivata apparente di* y *rispetto ad* x_1 *nella derivata totale di* x_1 *rispetto ad* x, *più il termine analogo che si ottiene scambiando la variabile* x_1 *con l'altra* x_2.

L'elemento

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\right)\right) \qquad \big(y - f(x_1, x_2), x_1 = l(x), x_2 = m(x)\big),$$

che mi indica la derivata apparente rispetto ad x_1 della derivata omonima relativamente ad x_2, si rappresenterà con la notazione più semplice

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\, \partial x_2}\right) \equiv \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\, \partial x_1}\right),$$

essendo, come è manifesto, indifferente l'ordine di più derivazioni successive apparenti.

La formola che dà la derivata seconda di una funzione implicita y della x, definita dalla relazione $f(x, y) = 0$, diventa mercè la nuova notazione

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)^2}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^3}.$$

Ho avuto occasione di convincermi dell'efficacia del concetto tanto semplice di derivata apparente nel mio insegnamento di Calcolo differenziale impartito all'Istituto Tecnico Superiore di Milano.

Così, ad esempio, quando voglio trovare le derivate parziali di una funzione implicita z delle variabili indipendenti x ed y definita dalla relazione $F(x, y, z) = 0$, faccio come segue. Posto

$$t = f(x, y, z) = 0 \quad , \quad \text{ho}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \;,$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \;.$$

Senza la fatta convenzione dovrei fare

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} \;,$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} \;,$$

ed il simbolo $\frac{\partial t}{\partial z}$ comparirebbe nella prima relazione due volte con diverso significato, nel primo membro sarebbe cioè la derivata parziale della funzione $t = F\big(x, y, l(x, y)\big)$ rispetto alla variabile indipendente x, nel secondo invece la derivata apparente della relazione $t = F(x,y,z)$, indicandosi con $z = l(x, y)$ la funzione definita della eguaglianza $F(x, y, z) = 0$.

La stessa cosa si ripeta della notazione $\frac{\partial t}{\partial y}$ che compare nella seconda delle due ultime eguaglianze.

Milano, 28, 1, 1894.

RECENSIONI

Ernesto Cesàro. — *Corso di Analisi Algebrica con Introduzione al Calcolo Infinitesimale.* Torino, Frat. Bocca ed., 1894. Prezzo L. 12.

Un nuovo libro molto pregevole è il Corso d'Analisi del professore E. Cesàro. L'autore, dopo di aver posti i primi elementi delle sostituzioni, intraprende lo studio delle Matrici e dei determinanti; ne dà con chiarezza, rigore e concisione le principali proprietà ed il teorema di moltiplicazione; si occupa dei determinanti reciproci e dei loro minori, dei determinanti simmetrici, emisimmetrici e pseudosimmetrici; applica la teoria dei determinanti alla risoluzione e discussione dei sistemi d'equazioni e di forme lineari ed alle trasformazioni lineari delle quali, dopo uno studio generale, considera particolarmente le ortogonali ed insegna a costruirle. Si occupa poi delle quadriche. Dà le prime proposizioni relative alle forme invariantive in generale ed agli invarianti ortogonali in particolare. Accenna alle forme canoniche in generale, insegna a ridurre a forma canonica le quadriche e ne dimostra l'importante legge d'inerzia. Passando ai numeri, dà le fondamentali definizioni e regole di calcolo relative ai numeri irrazionali; stabilisce i concetti e le proposizioni fondamentali del metodo e dimostra importanti proposizioni della teoria dei limiti. Si occupa poi distesamente delle serie semplici e doppie.

Passando alle funzioni, ne stabilisce i concetti fondamentali; dimostra i principali teoremi risguardanti i limiti inferiore e superiore, fra cui quello di Weierstrass; dimostra il teorema che dà la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza d'un limite finito di $f(x)$ da un lato d'un dato numero reale a: per le funzioni continue dà, dopo altri, i teoremi di Weierstrass e di Cantor. Si occupa poi della derivazione delle funzioni inverse, delle funzioni di funzioni, di una somma, d'un prodotto, d'un quoziente, d'una potenza, delle funzioni esponenziali e circolari. Intrattenendosi sulle proprietà delle derivate, tocca il principio di condensazione delle singolarità; dimostra i teoremi di Rolle, di Cauchy, di Lagrangia, di l'Hospital. S'occupa poi della continuità delle funzioni di più variabili, delle funzioni composte, della derivazione dei determinanti e delle funzioni implicite; dà il teorema di Eulero per le funzioni omogenee. Dimostra le principali proposi-

zioni relative alla convergenza, non uniforme ed uniforme, delle serie di funzioni ed alla loro derivazione; per dare un esempio di funzione, che non ammette mai derivata in tutto un intervallo nel quale è sempre continua, considera la funzione di Weierstrass. Dà la formula di Taylor, con relativo resto, per le funzioni di una e di più variabili, e l'applica alla ricerca di massimi e minimi; negli esercizii parla del metodo dei minimi quadrati. Insegna a calcolare i logaritmi volgari mediante la serie logaritmica, la quale utilizza pure per dimostrare la formula di Stirling, ed a calcolare π mediante la serie equivalente ad $\operatorname{arc\,tg} x$. Considera la serie binomiale ed insegna ad usarla per il calcolo delle radici numeriche. Dà i numeri di Bernoulli e d'Eulero; dà pure la formula sommatoria d'Eulero e ne presenta il resto in forma propria, non avendo potuto dare il resto di Malmsten la cui determinazione richiede l'uso del calcolo integrale; dà pure la formula sommatoria simbolica

$$f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)=f(n+B)-f(B)$$

con la quale calcola le somme delle potenze simili dei primi n numeri interi ed, approssimativamente, la somma dei primi n termini della serie armonica ed il prodotto dei primi n numeri interi, ritrovando così la formula di Stirling; considera anche i polinomii di Bernoulli.

Passando ai numeri complessi, ne dà i concetti e le regole di calcolo fondamentali, ed esprime con essi le radici dell'unità delle quali dà anche direttamente le proprietà principali. Si occupa dei limiti e delle serie di numeri complessi; parla dei cerchi di convergenza delle serie di potenze ed accennai ai campi di convergenza di serie qualsiansi. Occasionalmente, fa conoscere le funzioni iperboliche e le loro relazioni con le circolari; definisce le funzioni logaritmica ed esponenziale di variabile complessa. Accenna ai numeri complessi a più unità, tra i quali nota i numeri alternati; si ferma sui quaternioni pei quali dà con molta chiarezza, in poche pagine, le fondamentali regole di calcolo ed il teorema di Hamilton.

Passando alla teoria delle equazioni, fa conoscere i metodi di eliminazione di Eulero e di Bezout; valendosi delle proposizioni premesse sull'eliminazione, dà del teorema di D'Alembert la bella dimostrazione di Clifford, che è puramente algebrica. Dopo insegna a formare la equazione, che ammette per radici tutte e solamente le comuni a due date equazioni; ed insegna pure a formare le equazioni, che ammettono rispettivamente come sole radici e semplici tutte le radici semplici, tutte le doppie, tutte le triple, ecc. di una data equazione. Per facilitare il calcolo del discriminante di una data equazione, osserva che, a meno d'un fattore numerico, è il risultante delle derivate par-

ziali del primo membro ridotto provvisoriamente omogeneo ed intero, ponendovi $\frac{x}{y}$ per x e moltiplicando per una conveniente potenza di y. Considera poi le funzioni relativamente al numero di valori che possono prendere, se vi si permutino le variabili; si occupa prima di quelle ad un valore o funzioni simmetriche per le quali dà le formule di GIRARD e di WARING; dimostra che ogni funzione simmetrica intera è funzione razionale ed intera delle funzioni simmetriche elementari; e dà criterii basati sul peso e sul grado per facilitare il passaggio da una funzione simmetrica in più quantità alla sua espressione nelle funzioni simmetriche elementari di tali quantità, od inversamente; ne fa applicazione al calcolo del discriminante, che eseguisce per la equazione di 3° grado, ed all'eliminazione. Negli esercizi parla della Hessiana, della Jacobiana e dell'ingegnoso metodo di HALPHEN per il calcolo di forme invariantive. Fa poi conoscere la forma generale delle funzioni a due valori, alternanti e non alternanti; dimostra che soltanto le funzioni simmetriche od alternanti possono avere potenze simmetriche e che, delle funzioni a più di quattro variabili, soltanto quelle a due valori possono avere potenze a due valori; dà funzioni di tre e di quattro variabili, che hanno più di due valori ed hanno cubo a due valori. Tratta poi dell'enumerazione delle radici per il quale scopo dà i teoremi di ROLLE, di CARTESIO, di LAGUERRE, di BUDAN, di STURM, di BORCHARDT. Tratta poi della risoluzione numerica delle equazioni; dà per la determinazione dei limiti delle radici le regole di NEWTON, di LAGUERRE, di MACLAURIN, di LAGRANGIA e di TILLOT; insegna a calcolare le radici razionali; fa vedere che una radice, che sia sola del proprio grado di moltiplicità, è razionale e ne deduce che l'applicazione ad una proposta equazione del metodo di ricerca delle radici multiple può occorrere solo se il grado della proposta equazione è maggiore di 5; insegna a calcolare le radici irrazionali col metodo di NEWTON e FOURIER, del quale dà pure interpretazione geometrica. Dopo tratta della risoluzione algebrica delle equazioni; per la risoluzione della cubica e della biquadratica fa conoscere i metodi di HUDDE, d'EULERO, di CAYLEY e di LAGRANGIA; coi metodi dovuti a Cayley ed a Lagrangia risolve anche la quadratica; pone in evidenza gl'inconvenienti della formula di TARTAGLIA per la risoluzione dell'equazione di 3° grado ed insegna a rimediarvi; dimostra l'importantissimo teorema di RUFFINI sull'impossibilità di risolvere algebricamente le equazioni generali di grado superiore al 4° e fa osservare come i ragionamenti occorsi per tale dimostrazione facciano scoprire le formule di risoluzione delle equazioni di grado minore di 5.

S'occupa poi del calcolo delle differenze e della interpolazione; di-

mostra il teorema di Staudt e Clausen sui numeri di Bernoulli. Poi s'occupa di sviluppi fattoriali; insegna a riconoscere se un dato prodotto infinito sia convergente; dà gli sviluppi in prodotti infiniti di sen x e cos x dai quali deduce il valore di Wallis per $\frac{\pi}{2}$; ne deduce anche uno sviluppo in serie di cot x dal quale prende occasione per dare utili notizie risguardanti le somme degli inversi delle potenze simili dei numeri interi; infine fa conoscere formule di Gauss, d'Eulero, di Legendre e di Weierstrass relative alla funzione gamma.

Chiude il libro con note ed aggiunte relative alle teorie svolte.

Gli esercizii, di cui il libro è ricco, sono molto interessanti e scielti in modo da provocare nella mente dello studioso quella elasticità, e, dirò anche, quel gusto artistico, che tanto giova per dare un'impronta di genialità ancora ai più serii lavori scientifici. Molte proposizioni, specialmente della teoria dei limiti e delle serie, e certi sviluppi ottenuti con l'uso del calcolo simbolico e delle differenze, con coefficienti espressi in numeri di Bernoulli o d'Eulero, sono ricavati da note e memorie pubblicate dall'autore nei diversi periodici di matematica.

Genova, febbraio 1894.

F. Giudice.

Giulio Vivanti — *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico.* — (Mantova, Ditta Editrice G. Mondovì, 1894) p. 134.

L'antico precetto « divide et impera » che con tanto successo venne e vien tuttora invocato e sfruttato da strategi e da politici, fu scelto come ausiliare anche per lo studio dei fenomeni naturali dai più remoti investigatori che ricordi la storia, i quali nutrivano fiducia che, collo scomporre in parti un certo fatto o in tante fasi l'intervallo di tempo durante il quale esso si compie, si rendesse più agevole il riuscir vincitori delle difficoltà che presentava l'intelligenza del fenomeno complessivo. Ma sventuratamente non si tardò ad avvedersi come, nella generalità dei casi, le parti o le fasi ottenute fossero di studio non meno difficile del totale; tuttavia s'intravvide che, man mano si procedeva nella suddivisione, le parti raggiungevano una semplicità sempre maggiore, la quale sarebbe stata così grande da concedere la soluzione del proposto problema, ove la suddivisione stessa avesse potuto ripetersi

un numero illimitato di volte: le dottrine fisiche degli atomisti (Leucippo e Democrito, V Sec. a. C.) ed i conati di Antifonte e Brisone per quadrare il cerchio ([1]) fanno fede che quel magnanimo sforzo necessario per spiccare il salto dal finito all'infinito, è stato compiuto assai di buon ora dall'umanità procedente nel suo glorioso cammino dalle tenebre alla luce. Ma il mediocre successo che ottennero i due sofisti testè citati, lo spregio in cui anzi vennero tenuti i loro tentativi, fecero bandire per lungo volgere di secoli dalle scienze esatte l'idea di infinito e proporre un artificio (quello che più tardi fu detto *metodo di esaustione*), esente da qualunque concetto trascendente, e che conduce a quegli stessi risultati a cui menavano le argomentazioni basate sulla nozione d'infinito; tuttavia non si tardò ad avvertire che tale procedimento era un eccellente metodo di dimostrazione, ma un povero metodo di scoperta ([2]), che fra l'intenzione di chi lo usava e la condiscendenza del mezzo sorgeva assai spesso un deplorevole dissidio; e finalmente venne un giorno in cui emerse con irrefragabile evidenza come per la matematica l'uso ben regolato del concetto d'infinito fosse questione di vita o di morte. Ora — come si arguisce da quanto sopra si è detto — questo concetto si presentava sotto due forme distinte ma intimamente fra loro connesse e pressochè complementari, giacchè la divisione eseguita un numero di volte *infinitamente grande* produce delle parti di grandezza *infinitamente piccola*, microcosmo e macrocosmo, infinito ed infinitesimo erano dunque concetti inseparabili l'uno dall'altro che si richiamavano scambievolmente. Siccome però la suddivisione non è che il mezzo, mentre ciò che maggiormente preme è il risultato di essa, così l'interesse maggiore si concentra sul concetto di infinitesimo: seguirne il filo attraverso le menti e gli studi dei vari autori, arrestandosi sui metodi di calcolo quel tanto che è sufficiente per indurre il modo di vedere dei loro autori, ecco la ricerca che ha condotto a buon termine l'A. del lavoro che porge il tema al presente articolo ([3]).

In tale investigazione la prima domanda che si affaccia alla mente è: qual'era il concetto che dell'infinitesimo erasi formato Leibniz? Ad essa però non è concesso di porgere una risposta molto onorevole pel celebre emulo di Newton. Leibniz infatti — a cui non si può negare

---

([1]) Cfr. il *I Libro* del mio lavoro su *Le scienze esatte nell'antica Grecia;* n. 45, 48 e 49.

([2]) La giustificazione di quest'asserto si troverà nel *II Libro*, attualmente in corso di stampa, del mio precitato lavoro.

([3]) Noto con piacere che esso viene a soddisfare un mio antico desiderio che ho pubblicamente manifestato in questo giornale (*Rivista*, T. I, p. 185 nota).

di avere in generale acutamente intuita e sempre entusiasticamente significata la verità — ebbe a questo proposito delle idee variabili ed imprecise: e questa incessante oscillazione si propagò dal maestro ai discepoli (non esclusi Jacopo Bernoulli e Leonardo Eulero) i quali si industriarono piuttosto di dimostrare la fecondità delle idee del loro venerato capo che di legittimarne i procedimenti. Gli è solo più tardi che la questione concernente la natura degli infinitesimi venne posta all'ordine del giorno; essa provocò allora infiniti dibattiti, non sempre condotti a filo di logica, e spinse a sostenere delle tesi che in parte soltanto fanno onore a chi le escogitò. Sotto forma diversa tale questione riapparve nelle interminabili discussioni sull'*angolo di contingenza* la cui prima radice è da ricercarsi nella prop. 16ª del Libro III degli *Elementi* di Euclide; ma su di esse non è il caso di arrestarci qui a lungo. Ciò che importa osservare è invece, che al concetto di *infinitesimo come grandezza assolutamente nulla* o meglio a quello di *grandezza attualmente infinitesima*, faccia riscontro l'idea di infinitesimo riguardato come un elemento variabile generatore delle grandezze finite, riguardato cioè come un ente di grandezza nulla ma che in un dato modo e grado è dotata dell'attitudine e della tendenza di generare delle grandezze finite; in altre parole — per usare il linguaggio dei filosofi — *l'infinitesimo considerato come grandezza intensiva*. Da questo punto di vista esso venne studiato da molti matematici e filosofi; e le varie forme sotto cui è stato presentato si riducono a due: la *cinematica* e la *dinamica*. Come tipo della prima si può ritenere la constatazione del *fatto* che il punto muovendosi genera il continuo, come tipo della seconda la considerazione della *tendenza* del punto mobile a generare il continuo. La prima si può far risalire a Giordano Bruno, a Tommaso Hobbes la seconda. Dal grande filosofo da Nola rampollano Sovero, Cavalieri, Guldino, Barrow e Giovanni Ceva, dal filosofo inglese invece discendono Galileo, Newton (che rivestì di forma matematica le idee di Hobbes per farne la pietra angolare del suo grandioso edifizio), Taylor e Mac-Laurin.

Vista la ripugnanza generale dei matematici di fare lunghe dichiarazioni sul modo in cui concepivano gl'infinitesimi, a ragione l'A. pensò di sorprendere il segreto delle loro idee indagando il come essi le applicavano, il che è tanto più opportuno inquantochè nella storia della matematica non mancano esempi di geometri che, dopo avere dichiarato come concepivano l'infinitesimo, nelle applicazioni gli attribuivano un significato differente, forse perchè il primitivo mal si adattava ad essere tradotto in formole matematiche. A tale investigazione è consacrata la *seconda parte* dell'opuscolo che andiamo esaminando. Nella quale, dopo un capitolo sul metodo di esaustione

usato dagli antichi geometri (capitolo destinato principalmente ad istituire un paragone fra quel metodo ed i metodi moderni), l'A. si arresta al metodo degli indivisibili mettendone in luce l'essenza, la quale — per dirla in poche parole — consiste nel ritenere i corpi costituiti da infinite superficie e le superficie da infinite linee; è noto che esso venne metodicamente esposto ed applicato da Bonaventura Cavalieri; prima di lui però se ne servirono in varia misura Leonardo da Vinci e Keplero; dopo venne trasformato da Wallis, applicato da molti geometri ed assunto come modello da Grégoire de Saint-Vincent nell'architettare il suo metodo *ductus plani in planum*. — Alle scoperte come agli individui è necessaria una certa dose di fortuna per fare il loro cammino nel mondo: e fortuna non ebbe il metodo degli indivisibili sorto durante i bagliori antelucani del metodo infinitesimale. Questo, preparato dalle ricerche di Fermat sulla determinazione dei massimi e minimi e delle tangenti alle curve e dagli ulteriori sviluppi che queste ricerche ricevettero per opera di Huygens, comincia a rappresentare la parte di protagonista che non doveva più abbandonare, per opera di Leibniz, matematico al quale il nostro A. sostiene appartenere senza contrasto il *calcolo* se non il *metodo infinitesimale:* questo calcolo fu dal marchese dell'Hôpital per la prima volta esposto, venne magistralmente commentato da Varignon e dai due primi Bernoulli (a tacer d'altri) applicato a svariate questioni geometriche e meccaniche. Ad esso fa splendido riscontro il *metodo dei limiti e delle flussioni;* il quale non cedette dinnanzi al *methodus incrementorum* di Brook Taylor nè alla *théorie des fonction analytiques* di Lagrange, e per merito di Cauchy acquistò quelle doti di indiscutibile rigore che gli assicurarono un posto definitivo, stabile ed eccelso nello scibile matematico.

Ma per raggiungere questo desiderato intento, quante interminabili discussioni, quale ingente sperpero di forza intellettuale fu necessario! Ai nomi che abbiamo qua e là citati altri moltissimi se ne potrebbero aggiungere; le opinioni a cui alludemmo sono una piccola parte di quelle che vennero sostenute; i dibattiti di cui incidentalmente abbiamo fatto cenno, sono forse i più memorabili, ma non gli unici che ricordi la storia del calcolo infinitesimale!

Ora, di tutto quello che noi per brevità abbiamo taciuto, come dei documenti a sostegno delle nostre asserzioni, potrà il lettore avere notizia dal lavoro di cui ci stiamo occupando; al quale accresce pregio la ricchissima collezione di passi delle opere originali, col cui aiuto chiunque è in grado di controllare o discutere le conclusioni ed i giudizi dell'A. E la diligenza spiegata dal prof. Vivanti nel riunire gli atti del processo da lui fatto ai più illustri cultori del calcolo infinitesi-

male, nonchè l'imparzialità con cui egli presiedette allo svolgimento di esso, assicurano al suo scritto un posto onorevole nella raccolta di monografie storiche che l'età nostra va facendo con amorosa e lodevole cura; l'una e l'altra testificano in modo indiscutibile che della storia della scienza egli ha un altissimo concetto e farebbero credere che egli avesse scelto per propria guida ed ispiratrice la sentenza di Hankel: *la storia della matematica non deve semplicemente enumerare gli scienziati e i loro lavori, ma essa deve altresì esporre lo sviluppo interno delle idee che regnano nella scienza.*

GINO LORIA.

Opere ricevute.

FELIX KLEIN. — *Lectures on Mathematics, reported by Alexander Ziwet.* New-York, Macmillan and Co., 1894, p. VIII + 110.

GIULIO VIVANTI. — *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica.* Saggio storico. Mantova, G. Mondovì, 1894, p. 134, L. 3.

JOH. THOMAE. — *Die Kegelschnitte in rein projectives Behandlung.* Halle a. S. 1894. (Torino, Rosenberg et Sellier, L. 9).

A. REBIÈRE. — *Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités.* Paris, Nony, 1893.

Prof. F. AMODEO. — *Le operazioni sui numeri intieri trattate per le scuole secondarie.* Napoli, Pellerano, 1894, pag. 50. L. 1.

Sulla parte V del Formulario: « Teoria dei gruppi di punti ».

La presente parte del Formulario contiene, alquanto più sviluppata, la parte elementare della teoria dei gruppi di punti, quale fu pubblicata nelle prove di stampa del Formulario, comparse nel 1892 (Vol. II della Rivista), parte III, § 1-3. Essa serve di base a teorie più elevate sullo stesso soggetto, le cui formule vengono raccolte dal Prof. Vivanti.

Parecchie proposizioni sono contrassegnate con Def.; ciò significa che queste proposizioni si possono assumere per definizioni. Però siffatta indicazione è a considerarsi solo come approssimativa; poichè solo quando si fa completamente la teoria d'un soggetto, le proposizioni vengono distinte in definizioni e teoremi.

Il § 1 tratta del numero (num) degli individui d'una classe. Le definizioni sono quelle proposte nel mio articolo *Sul concetto di numero*, Riv. di Mat., I, p. 258. Forse è possibile il farne un'altra teoria assumendo come definizioni le ultime proposizioni di questo §.

Il § 2 si occupa dei massimi e minimi d'un sistema di numeri reali; se ne dànno le definizioni, e si enunciano le comuni proprietà. Altre proprietà sono contenute implicitamente nel § successivo.

Il § 3 si riferisce ai limiti superiore ed inferiore d'un gruppo di numeri reali.

Il § 4 contiene le definizioni, e proprietà fondamentali dei numeri complessi d'ordine qualunque n (o punti in una varietà ad n dimensioni). La prop. 1 dice che per numero complesso d'ordine n si intende la successione di n numeri reali. Le proposizioni successive definiscono l'eguaglianza di due complessi, la loro somma, il prodotto d'un numero reale per un complesso, il modulo d'un complesso. Queste operazioni e proprietà sono affatto semplici; siffatte convenzioni servono ad esprimere le prop. dei § successivi affatto in generale. Le P24-31 contengono la definizione e le proprietà del prodotto interno di due complessi. Esse servono nel § 7, onde definire la classe dei punti medii fra quelli d'una classe data.

Le ultime definizioni esprimono alcune notazioni sugli intervalli.

Il § 5 contiene le proprietà della classe derivata (secondo Cantor), di una classe data.

1. « Per classe derivata della classe u si intende l'insieme dei numeri complessi x tali che il limite inferiore dei valori assoluti delle differenze fra i numeri del sistema u diversi da x, ed x sia lo zero ».

7. « Qualunque si sia il numero (intero positivo) p, la derivata d'ordine p della classe u è contenuta nella derivata di u ».

12. « La classe derivata della classe ottenuta sommando due reciproci di numeri intieri positivi è costituita dai reciproci dei numeri interi positivi e dal valore 0; la classe derivata di quella che si ottiene sottraendoli, è formata dai reciproci degli N, da questi cambiati di segno, e dal valore 0 ».

Le prop. 21-42 si riferiscono alle classi derivate d'ordine infinito e dei varii ordini transfiniti d'una classe u.

Le prop. 41-42 contengono le definizioni delle derivate a destra ed a sinistra d'una classe u di numeri reali.

Data una classe u, risultano pure determinate tre altre classi, costituite dai punti interni ad u (Iu), dagli esterni ad u (Eu), e dai punti limiti di u (Lu). Il JORDAN, nel suo recente *Cours d'Analyse*, li chiama *points intérieurs, extérieurs* e *points frontière*. Queste operazioni I, E, L hanno molte proprietà, enunciate nel § 6.

Data una classe u, risulta pure determinata una nuova classe (§ 7) Cu, che si può chiamare « la classe u resa chiusa ». La sua definizione differisce leggermente da quella di Du, e le sue proprietà sono assai più semplici di quelle di Du. La classe Cu è utile in più questioni di Analisi.

E infine, dato un gruppo di punti u, ne risulta determinato un altro indicato con med u, e formato dai punti medii fra gli u. Se u è una classe di numeri reali, con med u si intende l'insieme dei numeri compresi fra il limite superiore e l'inferiore degli u, questi limiti esclusi (P 21). Se u è una classe di numeri complessi d'ordine n, con med u si intende l'insieme di tutti i complessi x tali che, comunque si prenda il complesso a, il prodotto interno $a \mid x$ (che è un numero reale) risulti medio fra i prodotti $a \mid u$ (che è una classe di numeri reali). Qui sono riportate le proprietà più semplici di questa classe. La classe med u serve per estendere ai numeri complessi i teoremi delle medie noti in Analisi infinitesimale. Così, essendo ft un complesso variabile funzione della variabile reale t, si ha

$$\int_a^b ft\, \mathrm{d}t = (b-a) \operatorname{med} f(a \frown b)\,.$$

NOTAZIONI USATE NELLA PARTE V.

Essendo u una classe,

num u si legga « il numero degli u ». § 1 P1.

Essendo k una classe di classi,

$\cap ' k$ si legga « la massima classe contenuta in tutte le classi k ».

$\cup ' k$ » « la minima classe contenente tutte le classi k ».

§ 1 P9, 10.

Essendo u una classe di numeri reali,

max u si legga « il massimo degli u »

min u » « il minimo degli u » } § 2 P1, 2.

$\mathrm{l}' u$ » « il limite superiore degli u »

$\mathrm{l}_1 u$ » « il limite inferiore degli u » } § 3 P1, 2.

q_n » « numero complesso d'ordine n » § 4 P1.

mod x, o m x si legga « modulo di x ».

$x \mid y$ si legga « prodotto interno di x per y ». Il segno | si può leggere « indice ».

Essendo u un gruppo di numeri complessi,

Du si legga « la classe derivata di u » § 5 P1.

$D^\omega u$ » « la classe derivata d'ordine infinito di u ». § 5 P21.

Iu » « la classe dei punti interni ad u »

Eu » « la classe dei punti esterni ad u »

Lu » « la classe dei punti limiti di u o contorno di u » } § 6 P1, 2, 3.

Cu » « la classe u resa chiusa »

med u » « la classe dei punti medii fra gli u » } § 7 P1, 23.

Essendo u una classe di numeri reali,

$D'u$ si legga « derivata a destra degli u »

$D_1 u$ » « derivata a sinistra degli u » } § 5 P41-42.

Molti termini usati nella teoria dei gruppi si possono esprimere coi segni finora introdotti, senza bisogno di segni nuovi.

Essendo u un gruppo di punti,

$Du \supset u \,.=.\, Cu = u \,.=.\, Lu \supset u \,.=.$ u è un gruppo chiuso (ensemble fermé, abgeschlossene Punktmenge).

$u \supset Du \,.=.$ u è condensato in sè (condensé en soi, insichdicht).

$Du = u \,.=.$ il gruppo u è perfetto (parfait).

$u \cap Du = \Lambda \,.=.$ u è isolato (isolé, isolirte).

G. Peano.

JOH. THOMAE in Jena. - *Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung*. Halle, L. Nebert, 1894.

Quest'operetta che, per via d'uno stile molto concettoso e stringato, tiene assai più di sostanza che non apparisca alla mole (181 pagine in-8°), riproduce, come l'A. espressamente dichiara, tutto quanto si trova in un libriccino sopra le forme piane di 1° e 2° ordine già pubblicato fin dal 1873. Ma le ragguardevoli aggiunte portate in ogni parte dall' A. a questo suo precedente lavoro, segnatamente per ciò che riguarda le coniche e gli elementi ideali, dànno carattere di libro nuovo alla presente edizione, la quale può vantarsi di offrire agli studiosi un sugoso ed elegante trattatello di geometria proiettiva, sotto molti aspetti originale; e ricco di varie esposizioni (come l'analisi di certe *configurazioni* che piglian nome da Mac-Laurin, Desargues, Pascal, Steiner, Clebsch, e uno studio sulle *determinazioni metriche* nel piano) che non trovan luogo per solito in altri trattati elementari della stessa materia.

L'A. segue le orme del v. Staudt quanto al metodo, facendo in somma astrazione, come egli felicemente si esprime, da qualsivoglia « sussidio di misure con unità mobili nello spazio ». Ma per minore scrupolosità negli enunciati e nelle dimostrazioni dei teoremi se ne scosta, a mio credere; così che l'aurea parola del Maestro vince sempre il paragone, dove questo è possibile. Si confrontino ad esempio i teoremi sui triangoli prospettivi (pag. 8) e sui triangoli polari ad una conica (pag. 65 e 77) come son proposti dall'A. (non meno che dalla più parte degli scrittori quantunque posteriori al v. Staudt), con le espressioni che di siffatte proprietà leggonsi ai §§ 89, 90, 242, 243 e 300 della « Geometrie der Lage » (*).

Come l'A. medesimo vuole osservato nella prefazione, l'opera sua,

(*) Nürnberg, Fr. Korn, 1847; o anche Torino, Frat. Bocca, 1889.

nel mentre che per la purezza del metodo si stacca da quelle dei sigg. Zech, Cremona, Rulf, Steiner-Schröter sullo stesso argomento, va distinta altresì dal notissimo trattato del sig. Reye, sia perchè non mira più in là delle forme piane, sia per l'adoperar che essa fa da per tutto anche gli elementi *ideali*. Questi vengono definiti *a coppie* di elementi *aggregati* (così l'A. in vece della parola *coniugati*, tenuta per altri concetti geometrici) come involuzioni ellittiche nelle forme semplici. Un sì fatto procedere all'introduzione degli elementi immaginari in geometria proiettiva non è nuovo in Italia, dove, mercè un lavoro del sig. Segre (*), riprodotto in sostanza nei trattati dei sigg. Sannia ed Aschieri, esso è già usato da qualche tempo a pro' dell'insegnamento superiore.

Rechiamo qui le intestazioni dei varî capitoli del libro, a porgere un'idea del contenuto: « *Einleitung — Lineare Gebilde: die harmonische, die perspective und die proiective Beziehung — Gebilde zweiter Ornung; Aufgaben zweiten Grades — Pol und Polare: Dualität — Ideale Elemente und die Involution — Kegelschnittbüschel und Schaaren — Fortsetzung; ideale Kegelschnitte — Zwei Configurationen und zwei Collineationen — Massverhältnisse — Nachträge und Bemerkungen* ».

Notevoli ci sembrano i due capitoli sui *fasci di coniche*, sì per l'importanza dei risultati che vi son conseguiti, sì per l'eleganza delle costruzioni che vi si annettono. Le coniche ideali sono introdotte con la definizione seguente, che può facilmente ridursi a quella di Staudt. Rispetto a un fascio di coniche con quattro punti fondamentali ideali, siano A, B due punti *coniugati*, e P, P', P'' i tre vertici del triangolo autopolare comune a tutte le coniche del fascio, ove si suppone che P' e P'' siano i punti limiti, o coniche limiti. Allora ad ogni retta a per B, che non sia separata dalla retta AB mediante P' e P'', è coordinata una conica del fascio, per la quale a è la polare di A. Ma quando a è separata da AB per mezzo di P' e P'' non esiste più una tal conica. In questo caso « noi *aggiungeremo* alla coppia Aa, considerati come polo e polare, una conica ideale ». — Le due collineazioni, di cui parla il penultimo capitolo, sono la *omotetìa proiettiva* (omologia) e la *rotazione proiettiva* (per la quale ognuna delle infinite coniche d'un fascio-schiera è mutata in sè stessa, ed è un punto unito il polo della corda di contatto comune alle medesime); e ognun vede i motivi della preferenza accordata a questi due casi speciali.

Ma particolarmente bello ed istruttivo dovrà parere a ogni lettore il capitolo finale sulla geometria metrica, dove in poche pagine —

(*) Nelle Memorie dell'Accad. delle scienze di Torino, 1886.

— premesso qualche cenno sulle determinazioni metriche non-euclidèe — son poste chiaramente le basi della geometria metrica ordinaria del piano, considerata dal punto di vista della geometria di posizione. E ciò mi par tanto più da lodare, in quanto che non mi è noto alcun altro libro d'indole elementare, dove quest'argomento sia svolto compiutamente. Essendo data nel piano un'ellisse Ξ (*cerchio*) e quindi due punti ideali T e T' (*assoluto* euclidèo) comuni alla medesima ed alla retta impropria del piano (*retta all'infinito*), l'A. chiama *congruenti* due figure, le quali possan dedursi l'una dall'altra mediante una rotazione proiettiva che abbia per punti uniti i due punti T e T' ed un terzo punto reale qualunque (*perno* della rotazione); oppure mediante un'omologia (*traslazione*), la quale abbia per asse la retta TT', e un punto reale di questa per centro (*). Detto M il polo della retta TT' rispetto a Ξ (*centro* di Ξ), ogni angolo *retto* col vertice in M è formato da due diametri coniugati di Ξ: due angoli siffatti sono sempre *uguali* fra loro. Due rette qualunque per M formano angoli adiacenti *bisecati* da quei due diametri coniugati di Ξ, che son separati armonicamente dalle due rette: quindi è che, preso a piacere un angolo retto in M, si può dividerlo in 2, 4, 6, ... 2^n parti eguali, formando così un *rapportatore*, al quale ogni angolo dato può riferirsi mediante traslazione; e si ottiene per questa via la misura di un angolo qualunque con un numero scritto nel sistema di numerazione binario (presupposta la continuità della retta (pag. 2)). — Anche i semidiametri di Ξ sono *eguali* fra loro, e porgono l'unità di misura per le lunghezze o segmenti. Quest'unità di misura si può trasferire sopra una retta qualunque del piano con una traslazione; e così per via di note costruzioni è possibile determinare il numero di unità, mezze unità, quarti d'unità, ecc., contenuti in un dato segmento. Ma qui non è pur luogo da offrire una descrizione sommaria dell'intero capitolo: basti il dire che esso mostra altresì, benchè in forma succinta, una non piccola parte di ciò che è argomento dei primi tre libri di Euclide.

Dopo la lettura di una tale esposizione vien fatto di pensare, se non sia questa propriamente la forma migliore che abbia prima o poi a rivestire la *Geometria elementare*, oggi costituita quasi per intero sul concetto di *moto*. È ben noto che i fondamenti della Geometria elementare son tuttavia controversi, e come una perfetta analisi dei principii che ne sostengon l'edifizio (in armonia con le esigenze at-

---

(*) Forse allargando di poco una tal definizione (così sembra a chi scrive) si potrebbe comprendervi ancora, e senza uscire dal piano, il caso della eguaglianza *indiretta* (la quale non è in somma che una certa omologia involutoria composta con una traslazione).

tuali di una mente erudita) non sia stata ancor fatta: dovecchè ben poco resta da fare intorno la Geometria di Posizione (*). Questo avviene, perchè fra i *cambiamenti di rappresentazione* o *corrispondenze* geometriche, il moto fisico non è la più semplice; come saremmo indotti a credere dalla chiara nozione che abbiamo di tutte le sue proprietà, rese a noi più familiari dall'esperienza quotidiana. Ma altro è il conoscerle, altro il discernere in esse i fatti *primitivi* dai *derivati* e costruirvi sopra un edifizio logico. E mi par chiaro, che questo debba riuscire per forza più stabile se, in vece di poggiare sul terreno assai vario e superficiale della *corrispondenza di moto*, abbia le sue fondamenta nel suolo più profondo ed omogeneo della *collineazione* generale. E non solamente dovrà la Geometria elementare avvantaggiarsi nel rigore per via di un procedimento siffatto, ma anche in quanto a chiarezza (come fu già rilevato da Staudt nella prefazione all'op. cit.), e in quanto a *semplicità di premesse.*

A conforto di quest'opinione osserverò, che se si definisce la corrispondenza di moto, o l'eguaglianza delle figure, mediante traslazioni e rotazioni proiettive, o altre speciali collineazioni del piano e dello spazio, si può far senza di molti postulati, che nell'attuale organamento della Geometria elementare sono, o son tenuti necessari. Così è p. es. del postulato affermante la possibilità di rovesciare un segmento qualunque; poichè si può sempre con successive rotazioni proiettive scambiare l'uno nell'altro due punti dati a piacere: e una cosa analoga può dirsi dell'angolo piano e dell'angolo diedro. Così diventa superfluo il postulato che « una figura può muoversi tenendo fermi uno o due dei suoi punti, o anche tutti i punti d'una retta » e l'altro che « per fissare una figura è necessario e sufficiente tener fermi tre dei suoi punti non allineati » (**).

Torino, febbraio 1894.

MARIO PIERI.

(*) V. p. e. le *Vorlesungen über neuere Geometrie*, del sig. M. Pasch (Leipzig, Teubner, 1882), e i *Principî di Geometria logicamente esposti*, del sig. G. Peano (Torino, Bocca, 1889).

(**) Tutto ciò, ben inteso, finchè si consideri la Geometria elementare come una dottrina puramente ideale. Chè se poi vogliasi trattarla non come scienza astratta, ma più tosto come un ramo della fisica-matematica (del che non conviene dissimulare i molti vantaggi, specialmente didattici), io non dirò che, pur tenendo la via superiormente accennata, si possano come che sia risparmiare i postulati del moto: parendomi in vece che a questi si debba presto o tardi far luogo, se i principî e le deduzioni speculative si vorranno riscontrare coi fatti, e identificare con le idee che l'esperienza ci apprende intorno ai medesimi.

Trasformazione d'ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli.

Nota di M. PIERI

Che una qualunque curva algebrica (senza infiniti punti multipli) sia trasformabile razionalmente in una curva *sghemba* priva al tutto di punti singolari, si dimostra dal sig. POINCARÉ nella Nota « *Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques* » (Comptes rendus, t^e 117, 3 Juillet 1893). Di questo teorema offre il presente articolo un'altra dimostrazione alquanto più semplice, tratta da poche nozioni elementari di Geometria Projettiva, e condotta, in forma sintetica, per una via molto simile a quella mostrata dal sig. BERTINI nella Nota sulla « *Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppi* » (Rivista di Matematica, Vol. 1°, 1891, pag. 22; e Mathematische Annalen, Bd. 44°, 1894, s. 158).

Primieramente è lecito supporre che la curva data sia *piana:* atteso che una curva sghemba si può sempre proiettare *univocamente* sul piano, per modo cioè che un punto dell'imagine rappresenti generalmente un sol punto della curva oggettiva. Di poi questa curva piana si può anche supporre mutata razionalmente in un'altra, Γ, con soli punti multipli *ordinari,* A_0, A_1, A_2, ... A_r, per mezzo di successive trasformazioni quadratiche del piano (*).

Ciò premesso si consideri uno qualunque, A_0, di tali punti singolari, insieme con altri cinque punti B_1, B_2, ... B_5 indipendenti fra loro e dalla curva Γ: l'ultimo dei quali è da scegliersi con alcune av-

(*) Si potrebbe ancora, e senza modificare i ragionamenti che seguono, sostituire alla data una curva *sghemba* Γ con soli punti multipli ordinari, ottenuta per via di sole trasformazioni Cremoniane dello spazio: v. PANNELLI « *Sulla riduzione delle singolarità d'una curva sghemba* ». Rendiconti dell'Istituto Lombardo, XXVI$_2$, 1893.

vertenze particolari, come fra poco diremo. Ora, se le ∞^3 quadriche passanti per A_0, B_1, B_2, ... B_5 si riferiscono omograficamente ai piani dello spazio, resterà anche determinata una certa corrispondenza (1, 2) fra i punti di questo, e propriamente *una trasformazione doppia del* Reye (*); per la quale ad un punto qualunque, come centro d'una stella di piani, è coordinata quella coppia di punti, che le ∞^2 quadriche della rete corrispondente alla stella hanno ulteriormente a comune, dopo A_0, B_1, ... B_5. Una tal corrispondenza muterà la curva Γ (dello spazio *semplice*) in una curva sghemba Γ' (dello spazio *doppio*) riferita univocamente a Γ; ma con un punto multiplo di meno; e nel resto atta a modificarsi come Γ. Per ciò è necessario e basta che il punto B_5

1°) non appartenga alla superficie descritta dall'ottavo punto base d'una rete di quadriche, mentre due punti base variano comunque su Γ e gli altri cinque cadono rispettivamente in $A_0, B_1, ... B_4$ (**)

2°) e neppur giaccia sopra alcuno degli r coni quadrici, che hanno il punto A_i per centro ($i = 1, 2, ... r$) e passano per $A_0, B_1, ... B_4$.

La prima restrizione fa sì che due punti qualunque di Γ non possano mai corrispondere a un medesimo punto di Γ': ond'è che la trasformazione doppia in parola muterà *univocamente* Γ in Γ', ed anche *ogni* punto semplice di Γ in un punto semplice di Γ' senza eccezioni di sorta; essendo che essa non produce nello spazio semplice alcuna superficie fondamentale. Inoltre, per effetto dell'una e dell'altra restrizione, ai punti singolari A_1, A_2, ... A_r di Γ corrisponderanno in Γ' punti multipli della stessa natura, vale a dire *a tangenti distinte:* perocchè A_i non sarà mai congiunto ad alcun punto di Γ; e non giacerà sulla Jacobiana delle ∞^3 quadriche, che è la *superficie doppia* dello spazio semplice. Ma, in quanto al punto singolare A_0, esso verrà cangiato in un gruppo di punti *semplici* e *distinti* della curva Γ': attesochè per la trasformazione considerata le ∞^2 direzioni inerenti ad A_0 corrispondono *omograficamente* ai punti d'un piano (***).

(*) V. le due Memorie « *Ueber die Kummer'sche Configuration* etc. » e « *Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse* etc. » in Crelle's Journal, Bd. 86.

(**) Si osservi che questi punti definiscono in fatti una rete di quadriche, la quale non può aver *linee* basi, trattone il caso che i primi due siano allineati con uno qualunque degli altri, o stiano con tre qualunque di essi in una conica, o con tutti e cinque in una cubica.

(***) È noto che l'*intorno* di ciascun punto fondamentale dello spazio semplice si trasforma biunivocamente in un piano punteggiato dell'altro spazio; e che i raggi d'un fascio, il quale abbia centro in quel punto, si mutano nelle generatrici d'una rigata cubica avente in quel piano la sua direttrice semplice.

Ora, come si è fatto scomparire da Γ il punto multiplo A_0, per egual modo si potranno distruggere successivamente le singolarità tuttavia esistenti in Γ'. Ecc., ecc. —

La maniera, onde Γ si converte in Γ', consente un'interpretazione notevolmente piana ed intuitiva. Lo spazio di punti si può intender generato da tutte le quadriche passanti per A_0, B_1, ... B_4: onde esso apparirà come imagine di una ben nota *varietà cubica* (con dieci punti doppi e quindici piani) *dello spazio a quattro dimensioni.* La curva Γ rappresenta punto per punto una certa curva Γ^* di questa varietà; come B_5 è imagine di un certo punto B_5^*. Allora, proiettando la curva Γ^* da B_5^*, nascerà sullo spazio ordinario la curva Γ'.

Torino, aprile 1894.

Bernardi Dott. Prof. Giuseppe. — *Soluzionario degli esercizi di trigonometria piana contenuti nel trattato di trigonometria di G. A. Serret.* — Firenze, Le Monnier, 1894, pag. 110. Prezzo L. 1,25.

È una raccolta di esercizi atta ad addestrare i principianti al maneggio delle formole di trigonometria piana e al loro impiego nella risoluzione dei problemi più semplici. Vi sono opportunamente alternate e ordinate secondo le difficoltà, da una parte le dimostrazioni di identità e le trasformazioni di espressioni in altre di forma determinata, dall'altra le questioni riferentesi alle relazioni tra gli elementi delle figure e alla costruzione delle medesime. Non mancano pure esempi semplici di determinazioni di angoli tali che siano soddisfatte determinate relazioni tra le loro funzioni trigonometriche.

La forma dell'esposizione è perfettamento adatta allo scopo che l'autore si propone, che è quello di rendere facile ed attraente l'apprendimento delle nozioni elementari e delle formole fondamentali della trigonometria piana.

Il passaggio al limite nelle formole della pag. 29, potrebbe essere fatta per via migliore e ciò indichiamo affinchè l'A. se ne possa servire in una nuova edizione.

G. Vailati.

Un'osservazione intorno alle formole per l'addizione degli archi

nella *Trigonometria* del SERRET.

Il Serret, nella sua Trigonometria (*), stabilisce per via sintetica, per due archi positivi a e b, ciascun minore del quadrante, e la cui somma si suppone non maggiore del quadrante stesso, le due formole fondamentali per l'addizione, e le due formole fondamentali per la sottrazione degli archi. L'Autore poi dimostra che le prime due formole sono vere per tutti i valori positivi e negativi degli archi a e b, e deduce indi come conseguenza, che anche le altre due sono vere per tutti i valori positivi e negativi degli archi medesimi. In ultimo il Serret (paragrafo 38) dice che non solo le due ultime formole sono comprese nelle prime due, ma anche ognuna delle prime due è conseguenza dell'altra, ad es. la formola

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \tag{2}$$

è conseguenza dell'altra

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \,. \tag{1}$$

Per far questo l'A. nella (1) muta a in $\frac{\pi}{2} - a$, e b in $-b$, e deduce la (2).

Ora a me pare che in quest'ultima affermazione vi sia petizione di principio. Perchè l'A. nel generalizzare le prime due formole non sempre dalla prima trae la prima e dalla seconda la seconda. Quando per es. dimostra che se le (1) e (2) sono vere per due determinati archi, sono vere ancora quando ad uno di essi si aggiunga un quadrante, dalla (1) deduce la (2), e viceversa. Talchè nella dimostrazione le formole (1) e (2) conservano una certa dipendenza, in virtù della quale la generalizzazione dell'una di esse non è indipendente dalla generalizzazione dell'altra, e che quindi non possa poi legittimamente affermarsi che dall'una potrà dedursi l'altra.

(*) Traduzione di A. FERRUCCIO. Firenze, 1856.

Siccome è difficile non riconoscere il merito dell'opera magistrale del Serret, da molti professori adottata come libro di testo nelle loro scuole, specialmente dopo le eccellenti versioni che ne hanno fatto i professori Grassi e Fenoglio, ho creduto, con questa piccola nota, di fare rilevare quella piccola svista, e indicare nello stesso tempo un modo come evitarla.

Mi propongo di generalizzare la (1).

Prima osservo che la (1) è vera sempre, se si considerano i soli valori assoluti dei *seni* e dei *coseni* degli archi a e b. Poi, come fa il Serret, pur conservando la restrizione che sieno $a < \frac{\pi}{2}$, $b > \frac{\pi}{2}$, tolgo quella che sia $a + b \leqq \frac{\pi}{2}$. Indi continuerò nel seguente modo:

a) Sieno $a > \frac{\pi}{2}, b < \frac{\pi}{2}, a + b < \pi$.

In quest'ipotesi sarà $\operatorname{sen}(a + b)$ positivo. Dalla figura si rileva poi che $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$ e $\cos b > \cos a$, e quindi, tenuto conto anche che $\cos a$ è negativo, risulterà in valore e segno, $\operatorname{sen} a \cos b > \cos a \operatorname{sen} b$, e $\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, che si riduce ad una differenza, sarà positiva.

b) $\pi > a > \frac{\pi}{2}, b < \frac{\pi}{2}, a + b > \pi$.

In questo caso $\operatorname{sen}(a + b)$ è negativo. Dalla figura si ha $\operatorname{sen} a < \operatorname{sen} b$, e, in valore assoluto, $\cos b < \cos a$. Perciò il valore assoluto di $\operatorname{sen} a \cos b$ è minore del valore assoluto di $\cos a \operatorname{sen} b$; e $\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, che si riduce alla differenza fra il valore assolulo di $\operatorname{sen} a \cos b$ e quello di $\cos a \operatorname{sen} b$, presa, tale differenza, con il segno di $\cos a \operatorname{sen} b$, sarà negativa.

c) $\pi > a > \frac{\pi}{2}, \pi > b > \frac{\pi}{2}$.

Sieno a' e b' i supplementi di a e b. Siccome $a' + b' = 2\pi - (a + b)$, e $a + b > \pi$, sarà $a' + b' < \pi$, con $a' < \frac{\pi}{2}, b' < \frac{\pi}{2}$. Per questo caso la (1) è vera (1ª parte della discussione del Serret); sarà perciò

$$\operatorname{sen}(a' + b') = \operatorname{sen} a' \cos b' + \cos a' \operatorname{sen} b'.$$

Ponendo per a' e b' i loro valori $\pi - a$, $\pi - b$, si avrà, dopo ovvie trasformazioni, di nuovo la (1).

Concludendo, la (1) è vera per tutti i valori positivi di a e b minori della mezza circonferenza.

La (1) è vera per tutti i valori positivi di a e di b. Infatti, sieno $a = k\pi + a'$, $b = k'\pi + b'$, dove a' e b' sono minori della mezza cir-

conferenza. Per questi due ultimi archi la (1) è vera. Ponendovi per a' e b' i loro valori si ha:

$$\operatorname{sen}[a+b-(k+k')\pi]=\operatorname{sen}(a-k\pi)\cos(b-k'\pi)+\cos(a-k\pi)\operatorname{sen}(b-k'\pi) .$$

Se k e k' sono entrambi pari o entrambi impari, da questa formula si deduce subito la (1); se sono uno pari e l'altro impari, questa formola si trasforma in

$$-\operatorname{sen}(a+b)=-\operatorname{sen} a \cos b-\cos a \operatorname{sen} b ,$$

che non è altro che la (1).

Tutto quanto è detto in *a)*, *b)*, *c)* dovrebbe sostituirsi alla seconda parte della discussione del Serret.

La terza e quarta parte si potranno conservare immutate, limitatamente sempre alla generalizzazione della formola (1), eccetto però la conclusione relativa alla parte quarta, in cui si dice che le formole (3) e (4), cioè quelle relative alla sottrazione degli archi, sono vere in generale. Dopo si potrà aggiungere l'osservazione del paragrafo 38, in cui dalla (1) generalizzata si deduce la (2), ed infine ciò che si è lasciato della parte quarta, cioè come dalle (1) e (2) si ottengono le (3) e (4).

Catania, aprile 1894.

S. Catania.

Nuove pubblicazioni.

L'intermédiaire des mathématiciens, dirigé par C. A. Laisant et E. Lemoine. Tome I, 1894. Abonnement, Union postale, 6 fr.

G. Papelier. — *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, avec une préface de M. P. Appell. Première partie. Géométrie plane. Paris, Nony, 1894, pag. 325.

A. Rebière. — *Les femmes dans la science.* Paris, Nony, 1894.

C. Arzelà. — *Complementi di algebra elementare.* Firenze, Succ. Le Monnier, 1894, pag. 225. — L. 2,50.

G. Riboni. — *Elementi di Geometria.* Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1894, pag. 256. — L. 3.

Risoluzione della Questione IV.

Enunciato. In un piano sono date n rette a_1, a_2 ... a_n. Determinare graficamente la posizione di un punto P pel quale si abbia

$$\rho_1 p_1^2 + \rho_2 p_2^2 + \dots + \rho_n p_n^2 = \text{minimum}$$

essendo $p_1\, p_2 \dots p_n$ le distanze del punto P dalle rette date e $\rho_1\, \rho_2 \dots \rho_n$ coefficienti assegnati.

N. Jadanza.

Soluzione. — Siano P_1 P_2 ... P_n i piedi delle perpendicolari abbassate dal punto P sulle rette a_1 a_2 ... a_n, è noto che P è il baricentro dei punti P_1 P_2 ... P_n, cui siano affisse masse proporzionali ai coefficienti ρ_1 ρ_2 ... ρ_n, cioè ponendo $m = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$, ed adottando le notazioni del Calcolo Geometrico (*), ha luogo la relazione

$$m\,P = \rho_1 P_1 + \rho_2 P_2 + \dots + \rho_n P_n$$

[Rivista di Matematica, vol. II, fascicolo 1°, e la dimostrazione più elementare del Bertot nei *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, Paris 1876].

Ad ogni punto A del piano facciamo corrispondere il punto A' tale che

$$m\,A' = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 + \dots + \rho_n A_n \tag{1}$$

essendo i punti A_1 A_2 ... A_n i piedi delle perpendicolari abbassate dal punto A sulle rette a_1 a_2 ... a_n. Si viene così a stabilire, tra i punti del piano, una corrispondenza definita dall'uguaglianza (1). Fra tre punti A, B, C del piano in linea retta passa la relazione

$$C = \frac{CB}{AB} \,.\, A + \frac{AC}{AB} \,.\, B \tag{2}$$

indicando con u il bivettore unità, con a_1 a_2 ... a_n n linee in grandezza

(*) G. Peano. — *Calcolo Geometrico* secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Torino, 1888.

eguali all'unità di misura e rispettivamente situate sulle rette $a_1\, a_2 \dots a_n$, e con A', B', C' i punti corrispondenti ad A, B, C hanno luogo le tre relazioni

$$m\,A' = \rho_1 (A \perp u\, a_1 \,.\, a_1) + \rho_2 (A \perp u\, a_2 \,.\, a_2) + \dots + \rho_n (A \perp u\, a_n \,.\, a_n)$$
$$m\,B' = \rho_1 (B \perp u\, a_1 \,.\, a_1) + \rho_2 (B \perp u\, a_2 \,.\, a_2) + \dots + \rho_n (B \perp u\, a_n \,.\, a_n)$$
$$m\,C' = \rho_1 (C \perp u\, a_1 \,.\, a_1) + \rho_2 (B \perp u\, a_2 \,.\, a_2) + \dots + \rho_n (C \perp u\, a_n \,.\, a_n)$$

Sostituendo in quest'ultima al punto C il secondo membro della (2) dopo alcune riduzioni si trova

$$C' = \frac{C\,B}{A\,B} \,.\, A' + \frac{A\,C}{A\,B} \,.\, B' \tag{3}$$

la quale dice che i tre punti A', B', C' sono in linea retta. Se adunque un punto A si muove nel piano percorrendo una linea retta, il suo corrispondente A' descriverà pure una linea retta, e le due rette si possono considerare come corrispondenti. Si può quindi concludere che la corrispondenza stabilita è un'omografia. Essendo i punti A', B', C in linea retta, ha luogo l'eguaglianza

$$C' = \frac{C'\,B'}{A'\,B'} \,.\, A' + \frac{A'\,C'}{A'\,B'} \,.\, B'$$

Confrontandola colla (3) si deduce

$$\frac{A\,C}{A'C'} = \frac{C\,B}{C'B'} = \dots$$

cioè due punteggiate qualunque corrispondenti sono simili, onde l'omografia è affine. Delle tre rette unite una è la retta all'infinito del piano e contiene due dei tre punti uniti, l'altro punto unito sarà, in generale, al finito ed è precisamente il punto P che si cerca. L'omografia potrebbe in qualche caso essere un'omologia coll'asse all'infinito, cioè essere un'omotetia: allora il punto P è il centro d'omotetia.

Per trovare graficamente il punto P si determinino i punti A', B', C' corrispondenti di tre punti A, B, C non in linea retta. Per avere A' si possono determinare i punti $A_1\, A_2 \dots A_n$, allora si ha

$$A' = A + \frac{1}{m} I$$

essendo I il vettore $\rho_1 (A_1 - A) + \rho_2 (A_2 - A) + \dots + \rho_n (A_n - A)$. Si vede che, acciocchè le cose dette abbiano valore, deve essere m diverso da 0.

È facile convincersi che nella costruzione grafica, avendo solamente id mira la ricerca del punto P, al punto A si può far corrispondere

il punto $A + I$ invece che il punto $A + \frac{1}{m} I$. Determinati A', B', C', resta a determinarsi il punto unito a distanza finita nell'affinità determinata dalle tre coppie di punti corrispondenti AA', BB', CC'. Per questo dal punto all'infinito della retta AB si proietti il punto C, e dal punto all'infinito della retta $A'B'$ si proietti il punto C'; se inoltre quest'operazione si immagina effettuata per tutte le altre coppie di punti corrispondenti, si ottengono due fasci di raggi paralleli proiettivi, anzi prospettivi, essendo unito il raggio che proietta i loro centri. I raggi corrispondenti si secheranno in punti tutti situati in una stessa retta u, che si può costruire. Analogamente si determini la retta v su cui si intersecano i raggi corrispondenti di due fasci di raggi prospettivi analoghi a quelli ora considerati, i cui centri siano i punti all'infinito delle due rette AC, $A'C'$ ovvero delle due rette BC, $B'C'$. Il punto di intersezione delle due rette u e v sarà il punto P, che si cerca.

Nella costruzione grafica, questa soluzione offre un notevole vantaggio su quella data dal Bertot e su quella data dal Sig. Peano nel Vol. II di questa Rivista.

Non saranno forse fuori proposito le considerazioni che seguono.

Indichiamo con P un punto variabile qualunque del piano, le cui distanze da n rette date $a_1\, a_2 \dots a_n$ siano rispettivamente $p_1 p_2 \dots p_n$; siano ancora $\rho_1\, \rho_2 \dots \rho_n$ n numeri reali, la cui somma m sia diversa da 0; indichiamo inoltre con u il bivettore unità e con $a_1\, a_2 \dots a_n$ n linee in grandezza uguali all'unità di misura e situate rispettivamente sulle rette $a_1\, a_2 \dots a_n$; allora l'equazione

$$(1') \qquad \rho_1 (a_1 P)^2 + \rho_2 (a_2 P)^2 + \dots + \rho_n (a_n P)^2 = k (\mathrm{u} P)^2$$

rappresenta il luogo dei punti P per cui la somma dei quadrati delle distanze dalle rette $a_1\, a_2 \dots a_n$ moltiplicati pei numeri $\rho_1\, \rho_2 \dots \rho_n$ è una quantità costante k [Calcolo Geometrico, N. 89, 4]. Essa è di secondo grado in P e rappresenta una linea di second'ordine. Volendone avere l'equazione in coordinate cartesiane, prendiamo come elementi di riferimento un vettore I in grandezza uguale all'unità di misura, il vettore $J = \perp I$ ed un punto 0 qualunque: ogni linea a_i si può allora mettere sotto la forma

$$a_i = u_i J 0 + v_i 0 I + r_i \mathrm{u}.$$

Avremo inoltre $P = 0 + x I + y J$.

Essendo $\mathrm{gr}.a_i = 1$ sarà $P a_i = u_i x + v_i y + r_i$, la distanza del punto P dalla retta a_i: l'equazione (1') si potrà quindi scrivere

$$\sum_i \rho_i (u_i x + v_i y + r_i)^2 = k$$

od anche

(2') $x^2\sum_i \rho_i u_i^2 + y^2\sum_i \rho_i v_i^2 + 2xy\sum_i \rho_i u_i v_i + 2x\sum_i \rho_i u_i r_i + 2y\sum_i \rho_i v_i r_i + \sum_i \rho_i r_i^2 = k$.

Il vettore della linea a_i è data dall'uguaglianza

$$a_i \mathrm{u} = v_i \mathrm{I} - u_i \mathrm{J} ;$$

onde si deduce

$$\rho_i r_i \perp a_i \mathrm{u} = \rho_i r_i u_i \mathrm{I} + \rho_i r_i v_i \mathrm{J} .$$

Si prenda il punto O coincidente col punto R, che è il baricentro dei piedi delle perpendicolari, dal medesimo abbassate sulle rette $a_1\, a_2 \ldots a_n$ coi coefficienti $\rho_1\, \rho_2 \ldots \rho_n$; punto che, per quanto si è detto precedentemente, si può sempre determinare essendosi supposto m diverso da 0: i numeri r_i rappresentano allora le distanze del punto R dalle rette date, e per esso si ha $\sum_i \rho_i r_i \perp a_i \mathrm{u} = 0$ per il che dovrà essere $\sum_i \rho_i u_i r_i = 0$ e $\sum_i \rho_i v_i r_i = 0$ onde l'equazione (2) assume la forma

(3') $$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 + 2\, xy \sum_i \rho_i u_i v_i + \sum_i \rho_i r_i^2 = k .$$

Variando la costante k, l'equazione (3') rappresenta una famiglia di coniche aventi per centro il punto R ed omotetiche fra loro. Le direzioni degli assi comuni a tutte queste coniche si può ottenere graficamente col procedimento indicato nel Calcolo Geometrico, N. 89, 7. Prendendo la direzione del vettore I coincidente con quella dell'asse focale delle coniche la loro equazione assume la forma

$$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 + \sum_i \rho_i r_i^2 = k .$$

Fra tutte ha importanza la conica per cui $k = 0$; la sua equazione è

(A) $$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 = - \sum_i \rho_i r_i^2 .$$

Se i coefficienti ρ_i sono tutti dello stesso segno, questa conica rappresenta un'ellisse immaginaria; il suo centro R è allora il punto per cui $\sum_i \rho_i p_i^2 = \sum_i \rho_i r_i^2 =$ minimum. Consideriamo ancora la conica per cui $k = 2 \sum_i \rho_i r_i^2$, la cui equazione è

(B) $$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 = \sum_i \rho_i r_i^2 .$$

Se la conica (A) è un'ellisse immaginaria, la (B) sarà un'ellisse reale e viceversa. Se una di esse è un'iperbole reale, anche l'altra è un'iperbole reale: esse hanno allora gli stessi assintoti, e l'asse immaginario dell'una è situato sull'asse focale dell'altra.

Le coniche (A) e (B) godono di una proprietà assai notevole. Per un punto P qualunque del piano passa una delle coniche di cui si è parlato, e la sua equazione è

$$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 + \sum_i \rho_i r_i^2 = \sum_i \rho_i p_i^2 .$$

Indicando con $x_0\ y_0$ le coordinate di un punto qualunque della conica (A) o della conica (B), e con x, y le coordinate di P, si può scrivere la formola

$$(4') \qquad \sum_i \rho_i p_i^2 = (x^2 \mp x_0^2) \sum_i \rho_i u_i^2 + (y^2 \mp y_0^2) \sum_i \rho_i v_i^2$$

che dà la quantità $\sum_i \rho_i p_i^2$ relativa ad un punto P qualunque del piano in funzione delle coordinate di esso punto e delle coordinate di un punto qualunque di una delle due coniche. I segni superiori si riferiscono alla conica (A), gli inferiori alla conica (B). Il punto di coordinate x_0, y_0 può essere un punto qualunque di una delle due coniche (A) e (B); possiamo quindi scegliere quello in cui esse tagliano l'asse focale, allora $y_0 = 0$ ed x_0 diventa il semiasse focale; se inoltre x è l'ascissa del punto in cui la conica passante per P taglia l'asse focale, la formola (4') si riduce alla

$$\sum_i \rho_i p_i^2 = (x^2 \mp x_0^2) \sum_i \rho_i u_i^2 .$$

Disegnata una delle due coniche (A) e (B), questa formola offre un metodo semplicissimo per determinare graficamente la quantità $\sum_i \rho_i p_i^2$ relativa ad un punto qualunque P del piano: e le due coniche hanno, a questo riguardo, analogia colla *Conica dei momenti nulli* e colla *Conica centrale* nella teoria geometrica dei momenti d'inerzia. Dal punto di vista delle operazioni grafiche non è forse inutile notare che, essendo $u_i^2 + v_i^2 = 1$, fra le costanti $\sum_i \rho_i u_i^2$ e $\sum_i \rho_i v_i^2$ passa la relazione

$$\sum_i \rho_i u_i^2 + \sum_i \rho_i v_i^2 = \sum_i \rho_i .$$

M. Canonica.

Sui fondamenti della Geometria.

Nota di G. Peano

Numerosi trattati di Geometria veggono la luce ogni anno in Italia e all'estero; spesso ne arrivano alla redazione della Rivista, con domanda di una recensione.

Ora questi nuovi trattati non sono, in generale, perfezionamenti di quelli già pubblicati; ma vi si ripetono, sotto varie forme, le cose contenute in altri, e non si tien conto di quelle osservazioni e studii speciali fatti sui fondamenti della Geometria, i quali studii, benchè fatti con scopo puramente scientifico, pur tuttavia fin d'ora permettono, in certa misura, di semplificare, rendendoli più rigorosi, i principii della Geometria.

In questa nota mi propongo appunto di trattare sommariamente quei punti in cui si può effettivamente raggiungere il doppio scopo del rigore e della semplicità; e di far notare agli insegnanti ed agli studiosi che, anche nella matematica più elementare ci sia ancor vasto campo di ricerche per loro natura interessanti, e che possono essere immediatamente utili, perfezionando i metodi di insegnamento. Questi studii non esigono vaste cognizioni, ma logica rigorosa.

È ben noto che, in Geometria, non tutto si può definire; ciò è esplicitamente detto da più autori.

Però varia assai presso i diversi autori il numero e la natura degli enti geometrici non definiti.

Affinchè risulti ben chiaro quali enti si definiscono in un trattato qualunque, e quali no, si osservi che i termini, che trovansi in esso, appartengono in parte alla Grammatica generale, o Logica; sono tali i termini *è*, *sono*, *e*, *o*, *non*... Chi si propone la loro classificazione ricostruisce la logica matematica.

Considereremo come termini geometrici tutti i termini che compaiono in un libro di geometria, e che non appartengono alla logica generale.

E il primo lavoro a farsi si è la distinzione di questi termini, o

delle idee che essi rappresentano, in idee *primitive*, che non si definiscono, e in idee *derivate*, che si definiscono.

Dire che l'oggetto, o nome x, si può definire, significa che, combinando convenientemente i termini esprimenti le idee primitive coi termini di logica, si può formare un'espressione identica a quella indicata col nome x.

Se in una definizione oltre al termine che si vuol definire, comparisce qualche termine che non è stato definito, nè classificato fra le idee primitive, si deve conchiudere che la classificazione non fu bene eseguita.

È chiaro che le idee primitive si debbano ridurre al minimo numero; e che per idee primitive si debbano assumere idee semplicissime, e comuni a tutti gli uomini; esse debbono avere il loro nome in tutte le lingue. Chi incomincia lo studio della Geometria deve già possedere queste idee primitive; non è punto necessario che conosca le idee derivate, che saranno definite man mano si progredirà nello studio.

Premesse queste osservazioni generali, passeremo rapidamente in rassegna le idee che nei comuni trattati si dànno come primitive.

Sul concetto di spazio.

In quasi tutti i trattati italiani moderni si introduce per primo il concetto di *spazio*, dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobile, ecc., proprietà queste parimenti non definite.

Ritenendo pertanto il concetto di spazio come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di Geometria nella lingua d'Euclide ed Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine *spazio*, nel senso in cui lo si usa negli odierni trattati.

In conseguenza una prima e notevole semplificazione si ottiene col sopprimere puramente e semplicemente il termine *spazio*, gli aggettivi *omogeneo*, *illimitato* e tutti i postulati che legano quel soggetto con questi attributi.

Questa osservazione sulla inutilità del termine *spazio*, in Geometria, riuscirà strana agli autori che incominciano il loro libro col parlare dello spazio.

Però l'esempio di Euclide e di tanti altri che non ne parlano affatto, è del tutto convincente. In seguito si vedrà meglio il perchè della superfluità di questo termine.

Intanto però, nel presente articolo critico, si continuerà ad usare il termine *spazio* nel significato usuale.

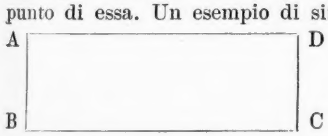
Sui concetti di linea, superficie, solido.

Euclide definisce la linea, la superficie e il solido mediante altrettanti termini non definiti *lunghezza, larghezza* e *altezza.*

Molte altre definizioni furono in seguito proposte, ma tutte lasciano a desiderare.

Così da più autori chiamasi *solido* una parte dello spazio, e *superficie* il limite d'un solido. Ma anche i punti che stanno su d'una superficie o su d'una linea si trovano nello spazio, e quindi sono una parte dello spazio. I punti la cui distanza da un punto fisso è razionale, costituiscono una parte dello spazio; ciò che separa questa parte dello spazio dal rimanente spazio, cioè il contorno di questo gruppo di punti (attribuendo a queste parole il significato preciso che hanno nella teoria dei gruppi di punti), è lo spazio intero, invece di essere una superficie.

Spetta a Möbius (*) l'osservazione, che si possono dare superficie che hanno una sola faccia, od una sola banda; vale a dire, per usare termini dell'uso comune, se si colorisce la superficie, a partire da un suo punto, con continuità, senza mai attraversare l'orlo della superficie, si finirà per aver colorita tutta la superficie, da ambe le parti di ogni punto di essa. Un esempio di siffatta superficie si forma intagliando il



rettangolo ABCD, e poi riunendo i lati AB e CD, in guisa che C venga in A e B in D. Una siffatta superficie non può costituire con altre superficie comunque prese, il limite d'un solido.

Si vede così che i concetti di solido, superficie, linea, in generale, siano alquanto indeterminati; e per far vedere meglio questa indeterminazione, già altra volta, come esempio (**) diedi l'espressione analitica d'un punto, che si muove con continuità col variare d'una variabile numerica, e tale che la linea descritta dal punto copre l'intero piano, e ogni arco di linea copre un'area piana; e indicai pure l'espressione analitica d'una curva di cui ogni arco occupa un volume.

(*) *Einseitige Polyëder*. Gesammelte Werke, II Band., pag. 519.

(**) *Sur une courbe* ... Math. Ann. Bd. 36, pag. 157. Vedasi pure KILLING, *Grundlagen der Geometrie*, Paderborn, 1893, ove queste questioni sono profondamente discusse.

Queste difficoltà si evitano facilmente col non parlare di solido, superficie, linea in generale, ma parlando solamente della retta, del piano, della sfera, ... cioè di quelle linee, superficie e solidi che compaiono effettivamento in Geometria elementare, lasciando alla matematica superiore lo studio di questi enti in generale.

Liberatici così dai concetti inutili e mal determinati, l'esame dei concetti fondamentali di Geometria acquista notevole semplicità.

Geometria di Posizione.

La semplificazione diventa più grande se anzitutto ci occupiamo solo di quel gruppo di proposizioni in cui non comparisce l'idea del moto, e quindi nemmeno quella di lunghezza o di altre grandezze geometriche; questo gruppo di proposizioni costituisce la Geometria di Posizione.

Il Pasch, nel suo importante libro *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Leipzig, 1882) giunse a sviluppare la Geometria di Posizione assumendo tre soli concetti primitivi, cioè il *punto*, il *segmento rettilineo* e la porzione finita di *piano*. Ma il terzo di questi concetti si può ridurre ai precedenti assumendo per definizione del piano, o d'una sua parte, una delle ben note sue generazioni. Sicchè, ammessi i due concetti, di punto e di segmento rettilineo, si possono definire tutti gli altri enti, e sviluppare tutta la Geometria di Posizione.

Invece di dire « c è un punto del segmento ab » è forse più comodo dire « c giace fra a e b »; sicchè tutta la geometria considerata basa sul concetto di *punto*, e sulla relazione fra tre punti a, b, c espressa dalla frase « c giace fra a e b ». Questi concetti si debbono ottenere coll'esperienza.

In seguito si farà anche uso delle notazioni di logica matematica, e per indicare le due idee primitive, scriveremo

p invece di « punto »,
$c \varepsilon ab$ invece di « c giace fra a e b ».

Un trattato di Geometria potrebbe cominciare con parole come le seguenti:

« Il punto si segna dagli agrimensori, sul terreno, con una palina « o con una pietra (termine). Sulla carta, sul legno, ... con un segno « fatto con un corpo terminato in punta. In agrimensura si verifica « che un punto c giace fra a e b, quando una persona, posta in a, « vede che l'oggetto c copre b. Dai disegnatori, fabbri, ... per riconoscere questa relazione fra i tre punti si adopera lo strumento detto « *rigo*; alcuna volta si usa una corda ben tesa ... ».

Premessi questi od altri consimili schiarimenti, od anche soppressili del tutto, bisognerà determinare le proprietà dell'ente non definito p, e della relazione $c \varepsilon ab$, mediante assiomi, o postulati. L'osservazione la più elementare ci indica una lunga serie di proprietà di questi enti; a noi non resta che a raccogliere queste cognizioni comuni, ordinarle, ed enunciare come postulati quelle sole che non si possono dedurre da altre più semplici.

Nel mio opuscolo « I principii di Geometria » (*) pubblicai l'analisi di queste proposizioni fondamentali, fatta colla logica matematica. I postulati ivi introdotti per trattare la geometria di posizione sono in numero di 17, ciascuno dei quali è un'affermazione semplice. I primi 11 coincidono in sostanza con quelli proposti dal Pasch. Credo cosa utile il riportarli qui di seguito. I numeri dei postulati, e tutte le citazioni si riferiscono al mio opuscolo anzidetto, che sarà indicato colla abbreviazione « Geom ».

Postulati I-VII.

Post. I. « Si può segnare un punto »

$$\mathrm{p} -= \Lambda .$$

Post. II. « Segnato un punto a, possiamo segnare un nuovo punto x, diverso da a »

$$a \varepsilon \mathrm{p} . \supset : x \varepsilon \mathrm{p} . x -= a . -=_x \Lambda .$$

Post. III. « Fra due punti coincidenti non giace alcun punto »

$$a \varepsilon \mathrm{p} . \supset . aa = \Lambda .$$

Post. IV. « Fra due punti distinti giacciono dei punti »

$$a, b \varepsilon \mathrm{p} . a -= b . \supset . ab -= \Lambda .$$

Post. V. « Se il punto c giace fra a e b, esso giace pure fra b ed a; ossia il segmento ba è identico ad ab »

$$a, b \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ab . \supset . c \varepsilon ba .$$

Post. VI. « Il punto a non giace fra a e b; ossia l'estremo d'un segmento non è interno al segmento stesso »

$$a, b \varepsilon \mathrm{p} . \supset . a - \varepsilon ab .$$

(*) Torino, Bocca, 1889. Havvi qualche lieve diversità di notazioni fra le formole di questo opuscolo, e le corrispondenti della presente nota.

La relazione fondamentale fra tre punti a, b, c espressa dalla frase « b giace fra a e c », come è enunciata, ha per soggetto il punto intermedio b; noi vogliamo darle un'altra forma in guisa che abbia per soggetto un estremo c. Perciò porremo:

Definizione. « Invece di dire che b sta fra a e c, diremo che c sta sul raggio $a'b$ »

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{p} . \mathrm{Ɔ} : c \varepsilon a'b . = . b \varepsilon ac . \qquad \text{(Geom. § 2 P1)}$$

La relazione $b \varepsilon ac$ si può anche risolvere rispetto ad a, poichè (Post. V) basta scriverla sotto la forma $b \varepsilon ca$, onde, per la definizione ora introdotta, $a \varepsilon c'b$.

Il raggio $a'b$ è adunque l'ombra del punto b rischiarato da a. Invece di dire « raggio $a'b$ » spesso diremo « il prolungamento del segmento ab dalla parte di b », ovvero più semplicemente « il prolungamento di ab ». Il prolungamento di ba è il raggio $b'a$.

Post. VII. « Dati due punti a e b distinti, esistono punti del raggio $a'b$; ossia un segmento si può prolungare da una qualunque delle due parti »

$$a, b \varepsilon \mathrm{p} . a -= b . \mathrm{Ɔ} . a'b -= \Lambda .$$

I postulati finora introdotti non esigono alcun schiarimento. Essi hanno differente importanza, come si vedrà in seguito, quando saranno adoperati.

Postulati VIII-XI.

L'osservazione comune ci indica molte altre proprietà dei segmenti e dei raggi. Eccone le principali.

1. $a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \mathrm{Ɔ} . ac = ab \cup \iota b \cup bc .$ (Geom. § 7 P4)
2. » $\mathrm{Ɔ} . ab \cap bc = \Lambda .$ (Geom. § 7 P35)

« Dati due punti a e c, e un punto b fra essi, allora il segmento ac resta scomposto nel segmento ab, nel punto b e nel segmento bc; i segmenti ab e bc non hanno alcun punto comune ».

3. $a, b \varepsilon \mathrm{p} . c, d \varepsilon ab . \mathrm{Ɔ} . cd \,\mathrm{Ɔ}\, ab .$ (Geom. § 7 P45)

« Se i punti c e d appartengono al segmento ab, tutto il segmento cd giace in ab ».

4. $a, b \varepsilon \mathrm{p} . \mathrm{Ɔ} . ab \cap a'b = \Lambda .$ (Geom. § 6 P19)
5. » $\mathrm{Ɔ} . a'b \cap b'a = \Lambda .$ (Geom. § 6 P21)

« Dati due punti a e b, il segmento ab ed un suo prolungamento

non hanno alcun punto comune; e i due prolungamenti del segmento *ab* non hanno alcun punto comune ».

6. $a , b , c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset . a'c = b'c .$ (Geom. § 9 P3)
7. » $. \supset . a'b = bc \cup \iota c \cup b'c .$ (Geom. § 8 P4)

« Dati tre punti a, b, c se b giace fra a e c, allora i raggi $a'c$ e $b'c$ coincidono; e il raggio $a'b$ consta del segmento bc, del punto c, e del raggio $b'c$ ».

8. $a , b \varepsilon \mathrm{p} . c , d \varepsilon a'b . \supset . cd \supset a'b .$ (Geom. § 8 P14)

« Se c e d sono punti del raggio $a'b$, l'intero segmento cd giace sul raggio $a'b$ ».

Analizzando queste proposizioni, si scorge anzitutto che esse sono dei gruppi di affermazioni, e non delle affermazioni semplici.

Così, nella tesi della prop. 1 si ha l'eguaglianza fra due classi; ora un'eguaglianza $a = b$ equivale all'insieme delle due proposizioni $a \supset b$, $b \supset a$; quindi la prop. 1 è equivalente al sistema delle prop. 9 e 10 che seguono:

9. $a , c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset . ab \cup \iota b \cup bc \supset ac .$ (Geom. § 6 P5)
10. » $. \supset . ac \supset ab \cup \iota b \cup bc .$ (Geom. § 7 P3)

La proposizione 9 alla sua volta, in virtù dell'identità di logica $a \cup b \supset c . = . a \supset c . b \supset c$ (Introduction au Formulaire, § 12, prop. 4'), si scinde in tre proposizioni:

11. $a , c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset . ab \supset ac .$ (Geom. § 6 P3)
12. » $. \supset . \iota b \supset ac .$
13. » $. \supset . bc \supset ac .$ (Geom. § 6 P4)

La 11, ove non si vogliano altri segni che i primitivi p, e $c \varepsilon ab$, diventa

$$a , c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset : d \varepsilon ab . \supset_d . d \varepsilon ac$$

o, importando l'ipotesi (Introd. § 12 prop. 13)

$$a , c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . d \varepsilon ab . \supset . d \varepsilon ac ;$$

e cambiando lettere, cioè leggendo b, c, d invece di d, b, c, onde avere la corrispondenza fra l'ordine alfabetico delle lettere, e la successione dei punti, si avrà

Post. VIII. $a , d \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ad . b \varepsilon ac . \supset . b \varepsilon ad$,

e siccome non sappiamo ridurre a forma più semplice questa proposizione, nè la sappiamo dedurre dalle precedenti, la assumeremo come postulato.

La prop. 12 si può leggere $b \varepsilon ac . x = b . \supset . x \varepsilon ac$, che è un'identità logica.

La prop. 13 si ottiene dalla 11 scambiando a con c, ed osservando che $ca = ac$, in virtù del post. V. Sicchè la prop. 13 è conseguenza dei postulati V ed VIII.

La prop. 10, ove tutto si esprima coi segni primitivi, e cambiando lettere, diventa

Post. IX. $a , d \varepsilon \mathrm{p} . b , c \varepsilon ad . \supset : b \varepsilon ac . \cup . b = c . \cup . b \varepsilon cd$,

che assumeremo come postulato. Pertanto la prop. 1 ha dato luogo a due nuovi postulati; e precisamente

Post V . Post VIII . Post IX . $\supset$. prop 1 .

Nel postulato VIII al posto di d si legga b; si avrà:

$a , b \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ab . b \varepsilon ac . \supset . b \varepsilon ab$.

Ma, pel post. VI, $b - \varepsilon ba$, e quindi (post. V) $b - \varepsilon ab$; onde la tesi è assurda; perciò sarà assurda l'ipotesi (Form. I, § 3 P13)

$a , b \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ab . b \varepsilon ac . = \Lambda$ (Geom. § 6 P18)

la quale è conseguenza dei postulati V, VI e VIII. Questa proposizione si enuncia:

Teorema. « È assurdo che tre punti a, b, c siano tali che b giaccia fra a e c, e c fra a e b ».

Esportando la prima parte dell'ipotesi di questo teorema, e risolvendo la terza rispetto a c, si avrà:

$a , b \varepsilon \mathrm{p} . \supset : c \varepsilon ab . c \varepsilon a'b . =_c \Lambda$,

ossia (Introduction, § 16 P2, e Formulario, I, § 4 P3)

$a , b \varepsilon \mathrm{p} . \supset : c \varepsilon (ab \cap a'b) . =_c \Lambda$

da cui, eliminando il c (Introd., § 16 P5),

$a , b \varepsilon \mathrm{p} . \supset . ab \cap a'b = \Lambda$ (Geom. § 6 P19)

cioè

Teorema. « Dati due punti a e b, il segmento ab ed il suo prolungamento dalla parte di b non hanno alcun punto comune ». Con uno scambio di lettere si ha che il segmento ab non ha nessun punto comune col suo prolungamento dalla parte di a.

Se invece, nel teorema indicato con § 6 P18 si risolvono le proposizioni rispetto ad a, esso assume la forma:

$b , c \varepsilon \mathrm{p} . a \varepsilon b'c . a \varepsilon c'b . = \Lambda$,

onde, esportando come prima:

$$b, c \varepsilon \mathrm{p} . \supset : a \varepsilon b'c . a \varepsilon c'b . =_a \Lambda ,$$

da cui eliminando a, collo stesso processo con cui si è eliminato or ora il c, si avrà:

$$b, c \varepsilon \mathrm{p} . \supset . b'c \frown c'b = \Lambda$$

e leggendo a e b al posto di b e c, si avrà:

$$a, b \varepsilon \mathrm{p} . \supset . a'b \frown b'a = \Lambda , \qquad \text{(Geom. § 6 P21)}$$

cioè:

Teorema. « Dati due punti a e b, non solo, come già si è dimostrato, il segmento ab non ha nessun punto comune coi suoi prolungamenti da ambe le parti, ma nemmeno questi prolungamenti hanno alcun punto comune ».

Così le proprietà espresse dalle proposizioni 4 e 5 sono conseguenza dei postulati V, VI e VIII.

Si ha il seguente

Teorema. « Dati due punti a e d, se c sta fra a e d, e b fra a e c, allora c sta fra b e d ».

$$a, d \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ad . b \varepsilon dc . \supset . c \varepsilon bd . \qquad \text{(Geom. § 7 P5)}$$

Infatti dalle ipotesi fatte, e dal post. VIII si trae $b \varepsilon ad$..

$$\mathrm{Hp} . \supset . b \varepsilon ad .$$

Ora dall'ipotesi $b \varepsilon ac$, e dal post. VI, si deduce che b è distinto da c:

$$\mathrm{Hp} . \supset . c - = b .$$

Dall'ipotesi $b \varepsilon ac$, e § 6 P18 si trae:

$$\mathrm{Hp} . \supset . c - \varepsilon ab .$$

Quindi si ha:

(α) $$\mathrm{Hp} . \supset . a, d \varepsilon \mathrm{p} . b, c \varepsilon ad . c - = b . c - \varepsilon ab .$$

Ora il post. IX, ove si scambi b con c, e si trasportino due parti dal secondo nel primo membro, diventa

(β) $$a, d \varepsilon \mathrm{p} . b, c \varepsilon ad . c - \varepsilon ab . c - = b . \supset . c \varepsilon bd .$$

Le (α) e (β) sono le premesse d'un sillogismo, la cui conclusione è

$$\mathrm{Hp} . \supset . c \varepsilon bd$$

che è il teorema a dimostrarsi. Esso dipende dai post. V, VI, VIII, IX.

La proprietà espressa dalla prop. 2 si può enunciare

$$a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . d \varepsilon ab . d \varepsilon bc = \Lambda ,$$

ed essa è conseguenza dei postulati finora introdotti.

Invero, pel teorema ora dimostrato (Geom. § 7 P5), si ha:

(α) $a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . d \varepsilon ab . \supset . b \varepsilon dc$; (post. V, VI, VIII, IX)

moltiplicando i due membri per $d \varepsilon bc$ si ha:

(β) $a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . d \varepsilon ab . d \varepsilon bc . \supset . b \varepsilon dc . d \varepsilon bc$. »

Ma una delle proposizioni già dimostrate (Geom. § 6 P18) è

(γ) $b, c, d \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon dc . d \varepsilon bc . =_{\mathrm{a}} \Lambda$ (post. V, VI, VIII)

da (β) e (γ) si deduce il teorema a dimostrarsi, che è conseguenza dei postulati V, VI, VIII, IX. Anche la proprietà espressa dalla prop. 3 si può dimostrare, e dedurre dai postulati III, V, VIII, IX.

Teorema. « Se sopra un segmento ab si prendono due punti c e d, l'intero segmento cd è contenuto in ab ». In simboli

$a, b \varepsilon \mathrm{p} . c, d \varepsilon ab . \supset . cd \supset ab$. (Geom. § 7 P45)

Infatti, nelle ipotesi enunciate, in virtù del postulato IX, o d sta fra a e c, o coincide con c, o giace fra c e b.

Ma, se d giace fra a e c, il segmento cd sarà contenuto in ca; ma poichè c giace fra a e b, il segmento ca sarà contenuto in ab; quindi cd sarà contenuto in ab.

Se d coincide con c, il segmento cd è nullo, e quindi è contenuto in ogni classe.

Se d giace fra c e b, sarà $cd \supset bc$; ma $bc \supset ab$; quindi $cd \supset ab$.

Dunque, qualunque sia la posizione dei punti c e d in ab, sempre il segmento cd è contenuto in ab.

In modo analogo si possono scomporre in proposizioni semplici le proprietà affermate dalle proposizioni 6, 7, 8; si troverà un gruppo di proposizioni fra cui due sole si debbono assumere come postulati, e sono

Post. X. $a, b \varepsilon \mathrm{p} . c, d \varepsilon a'b . \supset . c = d . \cup . c \varepsilon bd . \cup . a \varepsilon bc$.

« Se c e d sono due punti del prolungamento di ab, allora o essi coincidono, o c sta fra b e d, ovvero d sta fra b e c ».

Post. XI. $a, b, c, d \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . c \varepsilon bd . \supset . c \varepsilon ad$.

« Se b sta fra a e c, e c fra b e d, allora c sta fra a e d ».

Definizione della retta.

Finora si sono considerati semplicemente dei segmenti e dei raggi. In più modi si può definire la retta illimitata. Si può ad esempio porre:

Definizione. « Essendo a e b due punti distinti, dicesi retta deter-

minata da a e da b la figura formata dal segmento ab, dai suoi estremi a e b, e dai sui prolungamenti $a'b$ e $b'a$ ».

$$a,b \varepsilon \mathrm{p}.a -= b . \supset . \mathrm{retta}(a,b) = b'a \cup \iota a \cup ab \cup \iota b \cup a'b \,. \quad \text{(Geom. § 9 P8)}$$

Si osservi che retta (a, b) è una classe di punti; e la formola $c\, \varepsilon$ retta (a, b) si leggerà « c è un punto della retta ab ».

Si ha immediatamente retta (a, b) = retta (b, a), poichè scambiando a con b, non si fa altro che permutare le parti della retta.

Se c è un punto del segmento ab, sarà retta (a, b) = retta (a, c). Invero, dalle ipotesi fatte si avrà

$$b'a = c'a \,.\, ab = ac \cup \iota c \cup cb \,.\, a'c = cb \cup \iota b \cup a'b \,;$$

sostituendo e raggruppando convenientemente le parti in cui è scomposta la retta ab, si forma la retta ac. Analogamente se c è un punto del raggio $a'b$, ovvero del raggio $b'a$, sarà sempre retta(a,b)=retta(a,c); onde:

$$a,b \varepsilon \mathrm{p}.a -= b . c \,\varepsilon\, \mathrm{retta}(a,b) . c -= a . \supset . \mathrm{retta}(a,b) = \mathrm{retta}(a,c). \quad \text{(Geom. § 9 P13)}$$

Di qui risulta che una retta è determinata da due suoi punti; e due rette aventi due punti comuni coincidono.

Tre punti diconsi *collineari* se giacciono su d'una stessa retta. La condizione affinchè tre punti siano collineari è che o due coincidano, ovvero che uno appartenga al segmento determinato dagli altri due.

Il raggio, o semiretta $a'b$, come si è detto, è il raggio che va da b in direzione opposta di a. Nell'uso comune si parla spesso della semiretta che ha per origine a, e che contiene il punto b; la indicheremo in seguito con semiretta (a, b), e per abbreviazione Sr (a, b); sicchè

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, a -= b \,.\supset.\, \mathrm{Sr}\,(a, b) = ab \cup \iota b \cup a'b \,.$$

Diremo complemento del raggio Sr (a, b) il raggio che va da a in direzione opposta di b, cioè porremo

$$\mathrm{Co\,Sr}\,(a, b) = b'a \,.$$

Si avrà

$$\mathrm{retta}\,(a, b) = \mathrm{Sr}\,(a, b) \cup \iota a \cup \mathrm{Co\,Sr}\,(a, b) \,.$$

Sull'indipenpenza dei postulati della retta.

Le proposizioni finora esaminate costituiscono una parte della Geometria, che si potrebbe chiamare Geometria della retta. L'analisi di queste proposizioni, e la loro scomposizione in postulati si deve in sostanza al prof. M. Pasch. Havvi qualche diversità fra quanto precede

e le trattazioni del Pasch, come può assicurarsi chiunque esamini i due lavori; però non credo di arrestarmi su queste leggiere differenze.

La prima questione scientifica che si presenta si è se le proposizioni assunte come postulati siano effettivamente indipendenti, ovvero se si possano ridurre fra loro.

Un lavoro fu pubblicato su questo soggetto dal Dott. Vailati, col titolo *Sui principî fondamentali della Geometria della retta* (Rivista di Matematica, tomo II, pag. 71). Ivi l'A. studia il sistema di punti d'una retta fissa considerati come seguentisi in un senso, sicchè abbia un significato la frase: « il punto b segue il punto a ». Mediante questa relazione fra due punti l'A. esprime quella indicata colla frase: « il punto c giace fra a e b », e ne ricava tutte le proprietà da tre proposizioni primitive. Ma questa riduzione non è applicabile ai punti dello spazio, poichè la relazione fondamentale fra tre punti, espressa dalla frase « il punto c giace fra a e b » non si sa esprimere mediante una relazione fra due punti soli.

Si può provare l'indipendenza di alcuni postulati da altri, mediante esempi. Gli esempi per provare l'indipendenza dei postulati si ottengono attribuendo ai segni non definiti, che qui sono il punto, e la relazione fra tre punti espressa con $c \varepsilon ab$, dei significati affatto qualunque; e se si trova che i segni fondamentali, in questo nuovo significato, soddisfino ad un gruppo di proposizioni primitive, e non a tutte, si dedurrà che queste non sono conseguenze necessarie di quelle; ossia che il secondo gruppo di proposizioni esprimono proprietà dei punti e della relazione fondamentale $c \varepsilon ab$ che ancora non erano espresse da quelle.

Quindi per provare l'indipendenza di n postulati, bisognerebbe portare n esempi di interpretazione dei segni non definiti (nel nostro caso p, e $c \varepsilon ab$) ciascuno dei quali soddisfi a $n - 1$ postulati, e non al rimanente.

Siffatto complesso di esempi mi riuscì possibile costrurre per dimostrare l'indipendenza delle proprietà che si assunsero per caratteristiche dei numeri interi (Vedasi il mio articolo *Sul concetto di numero*, Rivista di Matematica, t. I, pag. 87). Qui invece siamo ben lungi dallo avere completata questa prova.

Ecco alcuni esempi:

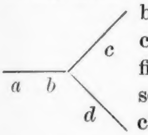
1. Se con p si intende numero positivo, Q (ovvero numero reale q, o numero razionale positivo R, o numero razionale r), e con $c \varepsilon ab$ si intende cha c è compreso fra a e b, cioè $c \varepsilon a^{-}b$, esclusi gli estremi, sono verificati tutti i postulati dall'1 all'11. Il segno $a'b$, se $a > b$, indica l'insieme dei numeri minori b, e se $a < b$, l'insieme nei numeri

maggiori di b. La retta ab coincide col sistema dei numeri considerati. Lo stesso avviene se si considerano i punti d'una curva aperta, i quali cioè si possano mettere ordinatamente in corrispondenza coi numeri precedenti.

2. Se con p si intende numero intero (positivo o negativo) n, e con $c \varepsilon ab$ si intende ancora che l'intero c sia compreso fra a e b, sono verificati tutti i postulati precedenti, eccettuato il IV, poichè se a e b sono interi successivi, fra essi non è compreso alcun numero intero. Così è dimostrato che il post. IV non è conseguenza degli altri.

3. Se con p si intende l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1, compresi gli estremi, cioè l'intervallo θ, e con $c \varepsilon ab$ si intende sempre che c è compreso fra a e b, saranno verificati tutti i postulati precedenti, eccettuato il VII; questo pertanto è indipendente dagli altri.

4. Con p si intenda l'insieme dei punti che stanno sulle tre semirette aventi la stessa origine; con $c \varepsilon ab$ la frase « c giace sul più breve cammino che unisce i due punti a e b, questo cammino essendo fatto sulle semirette date ». Sono verificati tutti i postulati precedenti, eccettuato il X; poichè se a, b, c, d hanno la disposizione della figura, è vero che b sta sul più breve cammino fra a e c e fra a e d, ma non ne risulta che c e d coincidano, ovvero che c appartenga al segmento bd, ovvero d al segmento bc.



5. Se con p intendiamo numero intero positivo, N, e con $c \varepsilon ab$ la relazione « c è un multiplo comune di a e di b », saranno soddisfatti i postulati 1, 2, 4, 5, 8, 11; se dicendo c è un multiplo di a, si esclude il caso $c = a$, vale a dire si intende $c \varepsilon (\mathrm{N} + 1) \times a$, sarà ancora vero il postulato 6; gli altri non sono verificati.

6. Se con p intendiamo i punti dello spazio ordinario, e con $c \varepsilon ab$ intendiamo « il punto c è equidistante da a e da b », allora ab rappresenta il piano perpendicolare alla retta da a a b, nel suo punto medio, e $a'c$ la superficie sferica di centro c e passante per a. Sono verificati i postulati 1, 2, 4, 5, 6, 7, e non gli altri. Nel postulato 6 però si deve supporre $a -= b$.

7. Se con p intendiamo i punti dello spazio ordinario, e con $c \varepsilon ab$ intendiamo « l'angolo acb è retto, e c è distinto da a e da b », allora ab rappresenta la superficie sferica di diametro ab, e $a'c$ il piano passante per c e perpendicolare alla retta ab. Sono verificati i postulati dall'1 al 7, e non i successivi.

Così si può continuare; ma in questo istante noi possiamo solamente

affermare che non si sanno scomporre le proposizioni assunte per postulati in altre più semplici; nè si è provata la loro indipendenza.

Geometria del piano.

Scriveremo p_2 invece della parola *retta*.

Essendo a, b, c dei punti, scriveremo $(a, b, c) \varepsilon \mathrm{Coll}$, o anche $a, b, c \varepsilon \mathrm{Coll}$, per dire a, b, c sono punti collineari.

Post. XII. $r \varepsilon \mathrm{p}_2 \,.\, \supset : x \varepsilon \mathrm{p} \,.\, x - \varepsilon\, r \,.\, -=_x \Lambda \,.$

Post. XIII. $a,b,c \varepsilon \mathrm{p}.(a,b,c) - \varepsilon \mathrm{Coll} \,.\, d \varepsilon bc.e \varepsilon ad. \supset : f \varepsilon ac.e \varepsilon bf \,.-=_f \Lambda \,.$

Post. XIV. » » » $.\, f \varepsilon ac. \supset : e \varepsilon ad.e \varepsilon bf \,.-=_e \Lambda \,.$

Cioè: « Data una retta r, si può segnare un punto x fuori di essa ».

« Se a, b, c sono tre punti non collineari, e se d è un punto del segmento bc, ed e un punto di ad, allora esiste un punto f appartenente al segmento ac, tale che e giaccia fra b ed f; vale a dire il segmento ac e il prolungamemto di be hanno un punto comune ».

« Avendo a, b, c lo stesso significato, se d è un punto di bc, ed f un punto di ac, esiste un punto e comune ai segmenti ad e bf ».

Prima di procedere oltre, introdurremo alcune notazioni.

Definizione. « Se a è un punto, e k una figura, o classe di punti, con ak intendiamo l'insieme dei punti che stanno sui segmenti che vanno da a ai varii punti di k ».

$$a \varepsilon \mathrm{p} \,.\, k \varepsilon \mathrm{Kp} \,.\, \supset .\, ak = \mathrm{p} \cap \overline{x \varepsilon} (y \varepsilon k \,.\, x \varepsilon ay .-=_y \Lambda) \,. \quad \text{(Geom. § 2 P3)}$$

In conseguenza, essendo a, b, c dei punti non collineari, con $a(bc)$ si intende l'insieme dei punti che stanno sui segmenti che uniscono a ai varii punti di bc.

Questa definizione è applicabile anche se tutti i punti considerati giacciono su d'una retta. Così $a(ab) = ab$ (Geom. § 6 P16). La scrittura $a(a'b)$ rappresenta il raggio che ha per origine a e che contiene b:

$$\mathrm{Sr}\,(a, b) = aa'b \,.$$

Indipendentemente da ogni postulato geometrico sussistono le proposizioni:

$$a \varepsilon \mathrm{p} \,.\, h, k \varepsilon \mathrm{Kp} \,.\, h \supset k \,.\, \supset .\, ah \supset ak \,. \quad \text{(Geom. § 3 P10)}$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad .\, \supset .\, a(h \cup k) = ah \cup ak \,. \quad \text{(Geom. § 3 P13)}$$

« Date due figure h e k, se la prima è parte della seconda, anche la proiezione della prima da un punto a è contenuta nella proiezione della seconda; e la proiezione della somma logica delle due figure è la somma logica delle proiezioni delle medesime ».

Il postulato XIII contiene nell'ipotesi la lettera d, che non comparisce nella tesi. Quindi con un procedimento di logica (Introduction, § 18 prop. 10), essa si può trasformare in:

$$a,b,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, (a,b,c) - \varepsilon\, \mathrm{Coll} : d \,\varepsilon\, bc . e \,\varepsilon\, ad . - =_d \Lambda :\supset: f \,\varepsilon\, ac . e \,\varepsilon\, bf . - =_f \Lambda \,.$$

« Dati i punti non collineari a, b, c, se si può determinare un punto d appartenente al segmento bc, e tale che e sia un punto di ad, allora si può determinare un punto f di ac, tale che e sia un punto di bf ».

Ma, per la definizione precedente,

$d \,\varepsilon\, bc \,.\, e \,\varepsilon\, ad \,.\, - =_d \Lambda$ equivale a $e \,\varepsilon\, a\,(bc)$
e $f \,\varepsilon\, ac \,.\, e \,\varepsilon\, bf \,.\, - =_f \Lambda$ » $e \,\varepsilon\, b\,(ac)$,

onde la proposizione precedente diventa:

$$a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, (a\,,b\,,c) - \varepsilon\, \mathrm{Coll} \,.\, e \,\varepsilon\, a\,(bc) \,.\supset .\, e \,\varepsilon\, b\,(ac)\,.$$

Esportando le due prime parti dell'ipotesi, questa si trasforma in

$$a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, (a\,,b\,,c) - \varepsilon\, \mathrm{Coll} \,.\supset : e \,\varepsilon\, a\,(bc) \,.\supset_e .\, e \,\varepsilon\, b\,(ac)$$

ovvero

» » $.\supset .\, a\,(bc) \supset b\,(ac)\,.$

Se in questa si scambiano a con b, si avrà

» » $.\supset .\, b\,(ac) \supset a\,(bc)\,.$

Moltiplicandole logicamente membro a membro, si ha infine

$$a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, (a\,,b\,,c) - \varepsilon\, \mathrm{Coll} \,.\supset .\, a\,(bc) = b\,(ac) \qquad \text{(Geom. § 10 P6)}$$

cioè:

Teorema. « Se $a\,,b\,,c$ sono punti non collineari, il triangolo che si ottiene proiettando da a il segmento bc coincide con quello che si ottiene proiettando da b il segmento ac ». D'altra parte (post. V) si ha che $bc = cb$, onde $a\,(bc) = a\,(cb)$. Scriviamo abc invece di $a\,(bc)$. Pertanto nella successione abc è permesso di permutare il primo punto col secondo, ed il secondo col terzo; onde è permesso di invertire comunque l'ordine dei vertici del triangolo.

Teorema. « Dati tre punti non collineari a, b, c, e preso fra ab un punto p, e su ac un punto q, tutto il segmento pq appartiene al triangolo abc ».

$$a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\, p \,\varepsilon\, ab \,.\, q \,\varepsilon\, ac \,.\supset .\, pq \supset abc\,. \qquad \text{(Geom. § 10 P10)}$$

Infatti, poichè $q \,\varepsilon\, ac$, ne risulta $pq \supset pac$, per la definizione di $p\,(ac)$. Ma $pac = cap$, pel teorema precedente.

Dall'ipotesi $p \,\varepsilon\, ab$, e dal postulato VIII si ricava $ap \supset ab$; onde $cap \supset cab$. Infine si ha $cab = abc$.

Dunque $pq \supset pac \,.\, pac = cap \,.\, cap \supset cab \,.\, cab = abc$; da cui $pq \supset abc$.

La proposizione precedente sussiste pure se a, b, c sono collineari, purchè a non appartenga al segmento bc.

Definizione. « Una figura k dicesi *convessa*, se il segmento che unisce due punti di essa è tutto contenuto in essa ».

$$k \varepsilon \mathrm{Conv} \,.=:\, k \varepsilon \mathrm{Kp} : x , y \varepsilon k \,.\supset_{x,\, y} .\, xy \supset k \,. \qquad \text{(Geom. § 2 P14)}$$

Senza bisogno di postulati geometrici si dimostrano le seguenti proposizioni:

Teorema. « La figura comune a due figure convesse è una figura convessa ».

$$h , k \varepsilon \mathrm{Conv} \,.\supset.\, h \frown k \varepsilon \mathrm{Conv} \,. \qquad \text{(Geom. § 3 P31)}$$

Teorema. « Se a, b, c sono punti d'una figura convessa, il triangolo abc è tutto contenuto in essa; e se a, b, c, d sono quattro punti d'una figura convessa, il tetraedro $abcd$ fa parte di essa ».

$$k \varepsilon \mathrm{Conv} \,.\, a , b , c \varepsilon k \,.\supset.\, abc \supset k \,. \qquad \text{(Geom. § 3 P33)}$$
$$\text{»} \quad .\, a , b , c , d \varepsilon k \,.\supset.\, abcd \supset k \,. \qquad \text{(» 34)}$$

Alcune proposizioni già enunciate nella Geometria della retta, introducendo il concetto di figure convesse, si semplificano. Così abbiamo:

« Il segmento compreso fra due punti a e b è una figura convessa; come pure lo stesso segmento cui si aggiunga un estremo, o tutti e due. Un raggio è una figura convessa, anche se gli si aggiunge l'origine. Ogni retta è una figura convessa ».

$$a , b \varepsilon \mathrm{p} \,.\supset.\, ab ,\, ab \cup \iota a ,\, ab \cup \iota a \cup \iota b \;\varepsilon\; \mathrm{Conv} \,. \qquad \text{(Geom. § 7 P46,47,48)}$$
$$\text{»} \quad a'b ,\, a'b \cup \iota b \;\varepsilon\; \mathrm{Conv} \,. \qquad \text{(Geom. § 8 P15, 16)}$$
$$\text{»} \quad \mathrm{retta}\,(a , b) \;\varepsilon\; \mathrm{Conv} \,. \qquad \text{(Geom. § 9 P17)}$$

Ritornando alla Geometria del piano, l'ultimo teorema dimostrato si trasforma in quest'altro:

Teorema. « Se si proietta una figura convessa k da un punto a fuori di essa, la figura risultante ak è pure convessa ».

$$k \varepsilon \mathrm{Conv} \,.\, a \varepsilon \mathrm{p} \,.\, a \,-\varepsilon\, k \,.\supset.\, ak \varepsilon \mathrm{Conv} \,. \qquad \text{(Geom. § 10 P13)}$$

Ne risulta che un triangolo abc, ove $a \,-\varepsilon\, bc$, è figura convessa.

Teorema. « Dati tre punti a, b, c non collineari, se p è un punto del triangolo abc, allora questo triangolo resta scomposto nel punto p, nei segmenti pa, pb, pc, e nei triangoli pab, pbc, pca ».

$$a , b , c \varepsilon \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\, p \varepsilon abc .\supset. abc = cp \cup pa \cup pb \cup pc \cup pab \cup pbc \cup pca \,. \qquad \text{(Geom. § 10 P26)}$$

Infatti per definizione, se $p \varepsilon abc$, esiste un punto d di bc, tale che $p \varepsilon ad$.

Ora se $d \mathrel{\varepsilon} bc$, sarà $bc = bd \cup \iota\, d \cup dc$; onde proiettando,

$$abc = abd \cup ad \cup adc\,.$$

E se p è un ad, sarà $ad = ap \cup \iota p \cup pd$; onde $abd = bad = bap \cup bp \cup bpd$, e $adc = cad = cap \cup cp \cup cpd$. Sostituendo nell'espressione di abc si avrà questo triangolo scomposto in parti nel modo indicato.

Teorema. « Presi nell'interno del triangolo abc due punti distinti p e q, il raggio $p'q$ incontra il perimetro del triangolo ».

$$a,b,c \mathrel{\varepsilon} \mathrm{p}\text{–}\mathrm{Coll}.p,q \mathrel{\varepsilon} abc.p -\!= q.\supset.p'q \cap (\iota a \cup ab \cup \iota b \cup bc \cup \iota c \cup ca) -\!= \Lambda\,.$$
(Geom. § 10 P27)

Infatti, poichè $p \mathrel{\varepsilon} abc$, sarà, pel teorema precedente,

$$abc = \iota\, p \cup pa \cup pab \cup pb \cup pbc \cup pc \cup pca$$

e poichè $q \mathrel{\varepsilon} abc$, e $q -\!= p$, sarà

$$q \mathrel{\varepsilon} pa \cup pab \cup pb \cup pbc \cup pc \cup pca$$

cioè

$$q \mathrel{\varepsilon} p\,(\iota\, a \cup ab \cup \iota\, b \cup bc \cup \iota\, c \cup ca)\,.$$

Ciò significa che q sta su qualche raggio che da p proietta il perimetro del triangolo. Ciò equivale alla proposizione a dimostrarsi.

Definizione. « Dato un punto a ed una figura k, con $a'k$ intendiamo la figura descritta dal raggio $a'y$, ove y coincida successivamente con tutti i punti della figura k, cioè l'ombra di k illuminata da a »:

$$a \mathrel{\varepsilon} \mathrm{p}.k \mathrel{\varepsilon} \mathrm{Kp}.\supset.a'k = \mathrm{p} \cap \overline{x \mathrel{\varepsilon}}\,(y \mathrel{\varepsilon} k.x \mathrel{\varepsilon} a'y.-\!=_y \Lambda)\,. \qquad \text{(Geom. §2 P4)}$$

In conseguenza, essendo a, b, c tre punti non collineari, $a'bc$ rappresenta la figura descritta da $a'y$, ove y percorra il segmento bc: essa è limitata dal segmento bc e dai due raggi $a'b$ e $a'c$. La scrittura $a'b'c$, cioè $a'(b'c)$ rappresenta l'*angolo* limitato dai raggi $a'c$ e $b'c$. Se r è una retta non passante per a, $a'r$ rappresenta il *semipiano* limitato dalla retta r, e che non contiene a.

Indipendentemente da ogni postulato geometrico sussistono le proposizioni:

$$a \mathrel{\varepsilon} \mathrm{p}.h, k \mathrel{\varepsilon} \mathrm{Kp}.h \supset k.\supset.a'h \supset a'k\,. \qquad \text{(Geom. § 3 P11)}$$
$$\text{»} \qquad .\supset.a'(h \cup k) = a'h \cup a'k\,. \qquad \text{(» P14)}$$

Ricorrendo al postulato XIV si dimostra

Teorema. « Se h è una figura convessa, e se a è un punto non appartenente ad h, allora la figura $a'h$ è convessa; come pure la $h \cup a'h$; come pure la $ah \cup h \cup a'h$ (Geom. § 11 P6, 7, 8).

Dati tre punti non collineari a, b, c, con piano (a, b, c) si può indicare per definizione, la figura costituita dai tre punti a, b, c, dai

segmenti ab, ac, bc, dai loro prolungamenti $a'b$, $b'a$, $a'c$, $c'a$, $b'c$, $c'b$, dal triangolo abc, dalle tre figure $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, e dagli angoli $a'b'c$, $b'c'a$, $c'a'b$.

Teorema. « Il piano (a, b, c) non si altera se al posto di a, b, c si mettono tre punti qualunque non collineari d, e, f del piano stesso », ossia

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{p} - \mathrm{Coll}. d, e, f \varepsilon \text{piano}(a, b, c). d, e, f - \varepsilon \mathrm{Coll}. \supset. \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(d, e, f) \qquad \text{(Geom. § 11 P23)}$$

Daremo un cenno della dimostrazione di questa proposizione, rimandando per lo sviluppo completo all'opuscolo menzionato.

Supponiamo anzitutto che, essendo a, b, c non collineari, d sia un punto di bc. Allora, dalla Geometria della retta, risulta

(1) $bc = bd \cup \iota d \cup dc$.

Proiettando si ha:

(2) $abc = abd \cup ad \cup adc$

(3) $a'bc = a'bd \cup a'd \cup a'dc$

(4) $b'c'a = b'd'a \cup d'a \cup d'c'a$.

Si ha

(5) $d'b = c'b$

da cui

(6) $a'd'b = a'c'b$.

Si ha, sempre dalla Geometria della retta,

(7) $b'd = dc \cup \iota c \cup b'c$

da cui

(8) $a'b'd = a'dc \cup a'c \cup a'b'c$.

Ricorrendo ai due postulati XIII e XIV si dimostra che

(9) $b'ad = adc \cup ac \cup b'ac$. (Geom. § 11 P15)

Trasformando convenientemente questa, si ha:

(10) $d'ab = c'ab \cup c'a \cup c'd'a$. (Geom. § 11 P16)

Le prop. (1) ... (10) dicono che le diverse parti costituenti il piano (a, b, c), convenientemente raggruppate, formano il piano (a, b, d), cioè

(11) $d \varepsilon bc. \supset. \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$. (Geom. § 11 P17)

Si scambi nella (11) c con d e si ricordi che se $d \varepsilon bc$, dire che

a, b, c non sono collineari, equivale a dire che non lo sono a, b, d. Essa diventa:

$$c \varepsilon bd . \supset . \text{piano}(a, b, d) = \text{piano}(a, b, c)$$

ovvero

(12) $\quad d \varepsilon b'c . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Scambiando in questa b con c, si ha:

$$d \varepsilon c'b . \supset . \text{piano}(a, c, b) = \text{piano}(a, c, d).$$

Ora piano (a, c, b) = piano (a, b, c), dalla definizione del piano; essendo poi b fra a e c, per la 11, piano (a, c, d) = piano (a, b, d); dunque

(13) $\quad d \varepsilon c'b . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Le prop. (11), (12), (13) dicono che se si prende il punto d sul segmento bc, o su uno qualunque dei suoi prolungamenti $b'c$ o $c'b$, sempre i due piani coincidono. Quindi, comunque si prenda d sulla retta bc, purchè distinto da b, sempre i piani abc ed abd coincidono.

(14) $\quad d \varepsilon \text{retta}(ab) . d -= b . \supset . \text{piano}(a,b,c) = \text{piano}(a,b,d)$. (Geom. § 11 P18)

Ne risulta

(15) $\quad d \varepsilon abc . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Infatti, dall'ipotesi si deduce che esiste un punto p tale che $p \varepsilon bc . d \varepsilon ap$. Quindi per la (11) piano (a,b,c) = piano (a,b,p), e piano (a,b,p) = piano (a,b,d).

(16) $\quad d \varepsilon a'bc . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Infatti esisterà un punto p tale che $p \varepsilon bc$, $d \varepsilon a'p$; per la (11) sarà piano (a,b,c) = piano (a,b,p), per la (12), piano (a,b,p) = piano (a,b,d).

(17) $\quad d \varepsilon a'b'c . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Di qui si deduce che qualunque sia il punto d del piano a, b, c, purchè non collineare con a e b, sarà sempre piano (a,b,c)=piano(a,b,d).

Se ora e è un nuovo punto del piano, non collineare con a, b, d, sarà piano (a, b, d) = piano (a, d, e); ed infine se f è un punto non collineare con d ed e, sarà piano (a, d, e) = piano (d, e, f); quindi piano (a, b, c) = piano (d, e, f).

Definizione. « Quattro punti diconsi complanari (per abbreviazione Cmp.) se giacciono in un medesimo piano ».

Risulta dalle cose dette che la condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro punti siano complanari è o che tre di essi siano collineari, ovvero che uno di essi sia interno al triangolo determinato

dagli altri tre, ovvero che i segmenti di una delle coppie che si ottengono unendo a due a due i punti dati si incontrino:

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, \supset : a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{Cmp} \,.=.\, a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{Coll} \,.\cup.\, a, b, d \,\varepsilon\, \mathrm{Coll} \,.\cup.\, a, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{Coll} \,.\cup.\, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{Coll} \,.\cup.\, a \,\varepsilon\, bcd \,.\cup.\, b \,\varepsilon\, acd \,.\cup.\, c \,\varepsilon\, abd \,.\cup.\, d \,\varepsilon\, abc \,.\cup.\, ab \cap cd \,-= \Lambda \,.\cup.\, ac \cap bd \,-= \Lambda \,.\cup.\, ad \cap bc \,-= \Lambda \,. \qquad \text{(Geom. § 11 P28)}$$

Teorema. « Se la retta r ha comune col piano p due punti a e b distinti, l'intera retta r giace nel piano p » (Geom. § 11 P29).

Infatti, se c è un punto del piano p non collineare con a e b, il piano p coincide col piano determinato dai tre punti a, b, c. Ma il piano a, b, c, per definizione, contiene la retta ab, cioè la retta r; dunque la retta r giace nel piano p.

Data una retta r, ed un punto a fuori di essa, si ha a considerare la figura $a'r$ che dicesi un semipiano; e la figura $r'ra$ che è pure un semipiano. Porremo

$$\mathrm{Sp}\,(r, a) = r'ra$$
$$\mathrm{Co\,Sp}\,(r, a) = a'r \,.$$

Si ha

$$r \,\varepsilon\, \mathrm{p}_2 . a \,\varepsilon\, \mathrm{p} . a \,-\varepsilon\, r . b \,\varepsilon\, \mathrm{Sp}(r,a) . \supset . \mathrm{Sp}(r,a) = \mathrm{Sp}(r,b) \qquad \text{(Geom. § 11 P35)}$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . \supset . \mathrm{CoSp}(r,a) = \mathrm{CoSp}(r,b) \qquad \text{» P33)}$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . b \,\varepsilon\, \mathrm{CoSp}(r,a) . \supset . \mathrm{Sp}(r,b) = \mathrm{CoSp}(r,a) \qquad \text{» P34)}$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad . \supset . \mathrm{piano}(r,a) = r \cup \mathrm{Sp}(r,a) \cup \mathrm{CoSp}(r,a) \,.$$

Geometria solida.

Post. XV. « Dato un piano h, si può segnare un punto a fuori di esso ».

Scriveremo p_3 invece del termine *piano*; sicchè

$$h \,\varepsilon\, \mathrm{p}_3 \,.\, \supset : a \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, a \,-\varepsilon\, h \,.\, -=_a \Lambda \,.$$

Dati i punti non complanari a, b, c, d, ha significato la scrittura $a(bcd)$, che indicheremo più brevemente con $abcd$, e che è il tetraedro luogo dei segmenti che vanno da a ai varii punti del triangolo bcd.

Teorema I. « Se a, b, c, d sono punti non complanari, i tetraedri $abcd$ e $bacd$ coincidono ».

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Compl} \,.\, \supset .\, abcd = bacd \,.$$

Infatti, per definizione di $abcd$ si ha:

$$(1) \qquad x \,\varepsilon\, abcd \,.=: y \,\varepsilon\, bcd \,.\, x \,\varepsilon\, ay \,.\, -=_y \Lambda$$

cioè, dire che x è un punto del tetraedro, equivale a dire che si può prendere un punto y della base bcd tale che x sia un punto del segmento ay. Ma per definizione del triangolo bcd si ha

$$y \varepsilon bcd . = : z \varepsilon cd . y \varepsilon bz . - =_z \Lambda .$$

Sostituendo si ha:

(2) $$x \varepsilon abcd . = .\therefore z \varepsilon cd . y \varepsilon bz . - =_z \Lambda : x \varepsilon ay : - =_y \Lambda$$

cioè, dire che x è un punto del tetraedro, equivale dire che si può determinare y in guisa che si può determinare un punto z del segmento cd tale che y stia fra b e z, e che y sia tale che x stia fra a ed y. Il secondo membro di quest'eguaglianza si trasforma, servendoci dell'identità 5 del § 18 dell'*Introduction*, in

$$x \varepsilon abcd . = : z \varepsilon cd . y \varepsilon bz . x \varepsilon ay . - =_{y,z} \Lambda$$

cioè, se x è un punto del tetraedro, si possono determinare i due punti y e z in guisa che z appartenga a cd, y a bz, e x ad ay. Questa proposizione, colla stessa identità logica si trasforma in

(3) $$x \varepsilon abcd . = .\therefore z \varepsilon cd : y \varepsilon bz . x \varepsilon ay . - =_y \Lambda : - =_z \Lambda$$

cioè, dire che x è un punto del tetraedro, equivale a dire che si può determinare un punto z di cd in guisa che si possa determinare un punto y del segmento bz tale che x giaccia fra a ed y. Ma si ha, per la definizione del triangolo

$$y \varepsilon bz . x \varepsilon ay . - =_y \Lambda : = . x \varepsilon abz ;$$

perciò l'ultima eguaglianza si trasforma in

(4) $$x \varepsilon abcd . = : z \varepsilon cd . x \varepsilon abz . - =_z \Lambda$$

la quale si è ottenuta dalla prima, cioè dalla definizione, con pure trasformazioni logiche. Ora, poichè a, b, z non sono collineari, dal postulato XIII si è dedotto $abz = baz$; onde

(5) $$x \varepsilon abcd . = : z \varepsilon cd . x \varepsilon baz . - =_z \Lambda .$$

Se nella (4) scambiamo a con b si ha:

(6) $$x \varepsilon bacd . = : z \varepsilon cd . x \varepsilon baz . - =_z \Lambda .$$

I secondi membri della (5) e (6) essendo uguali, deduciamo

(7) $$x \varepsilon abcd . = . x \varepsilon bacd ,$$

donde, operando con $\overline{x \varepsilon}$ sui due membri, si ha la formula a dimostrarsi.

Il lettore può dimostrare facilmente le proposizioni che seguono:

II. « Se e è un punto interno al tetraedro $abcd$, questo tetraedro viene scomposto nel punto e, nei quattro segmenti che vanno da e ai vertici

del tetraedro, nei sei triangoli eab, ... formati da e cogli spigoli del tetraedro, e nei quattro tetraedri di vertice e e di base le faccie del tetraedro dato ».

III. « Il prolungamento d'un segmento contenuto in un tetraedro incontra sempre la sua superficie ».

IV. $a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p}-\mathrm{Comp} \,.\, e \,\varepsilon\, bcd \,.\, f \,\varepsilon\, ad \,.\supset.\, ae \frown bcf -= \Lambda$.

Dimostreremo ancora il seguente

Teorema V. « Se in un piano q sono contenute due rette ab e cd, e se e è un punto fuori del piano q, i piani eab e ecd hanno comune una retta »:

$$q \,\varepsilon\, \mathrm{p}_3 \,.\, a, b, c, d \,\varepsilon\, q \,.\, a -= b \,.\, c -= d \,.\, e \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, e -\varepsilon\, q \,.\supset:\, r \,\varepsilon\, \mathrm{p}_2 \,.\, r \supset \mathrm{piano}(e, a, b) \,.\, r \supset \mathrm{piano}(e, c, d) \,.-=_r \Lambda. \quad \text{(Geom. pag. 38)}$$

Infatti, poichè i punti a, b, c, d sono complanari, o tre di essi sono collineari, o uno di essi è interno al triangolo determinato dagli altri tre, o si incontrano i segmenti ab e cd, ovvero ac e bd, ovvero ad e bc. (Geom. § 11 P28)

Se a, b, c sono collineari, allora la retta ec giace nei due piani dati.

Se a è interno al triangolo bcd, ciò vuol dire che il raggio $a'b$ e il segmento cd si incontrano in un punto f, e la retta ef giace nei due piani dati.

Se i segmenti ab e cd si incontrano in un punto f, la retta ef giace nei due piani.

In tutti questi casi semplicissimi è così dimostrato il teorema, ed è anzi determinata la retta cercata mediante il suo punto d'incontro col piano q. Rimangono a considerarsi gli ultimi due casi, in cui o ac incontra bd, o ad incontra bc; i quali si riducono l'uno all'altro collo scambio delle lettere c e d. Se le rette ab e cd, che giacciono in uno stesso piano, si incontrassero, la dimostrazione si può dare come le precedenti; ma in quanto segue non faremo alcuna ipotesi sull'incontrarsi o meno delle rette indefinite. Si badi incidentalmente che non abbiamo ancora parlato delle parallele condotte da un punto ad una retta, e non sappiamo se ne esista una o più.

Supponiamo adunque che i punti a, b, c, d siano tali che esista un punto h comune ai segmenti ad e bc, cioè $h \,\varepsilon\, ad \,.\, h \,\varepsilon\, bc$.

Si prenda sul prolungamento di ae un punto m, sicchè sia $m \,\varepsilon\, a'e$, cosa possibile pel postulato VII.

Poichè i punti m, a, d non sono collineari, e è un punto di ma, ed h un punto di ad, ne risulta, pel postulato XIV, che esiste un punto n appartenente ai segmenti ed ed mh.

Poichè i punti m, b, c non sono collineari, ed h è un punto di bc, ed n un punto di mh, esisterà (postulato XIII) un punto f giacente

su mb, e tale che n giaccia su cf. Dico che la retta ef è la retta cercata.

Infatti, poichè $e \, \varepsilon \, ma$, si ha piano $(e, a, b) =$ piano (m, a, b). Ma f è un punto di mb; dunque f appartiene al piano (e, a, b).

E poichè n è un punto di ed, ed f un punto di cn, sarà f un punto del piano (c, e, d).

Dunque il punto f giace nei due piani eab ed ecd, e la rettta ef giacerà pure nei medesimi.

Se le rette ab e cd si incontrano effettivamente in un punto x, questo sarà un punto della retta ef; e così si ritrova il teorema di Desargues sui triangoli omologici, che si può enunciare:

Se fra i dieci punti e, a, b, c, d, h, m, n, x, di cui i primi quattro non sono complanari, passano nove fra le relazioni:

$h \, \varepsilon \, ad \, . \, h \, \varepsilon \, bc \, . \, e \, \varepsilon \, am \, . \, n \, \varepsilon \, ed \, . \, n \, \varepsilon \, mh \, . \, f \, \varepsilon \, mb \, . \, n \, \varepsilon \, cf \, . \, a \, \varepsilon \, xb \, . \, c \, \varepsilon \, xd \, . \, e \, \varepsilon \, xf$,

passerà pure la rimanente.

Di questi dieci punti uno comparisce nelle dieci relazioni, tre volte come interno; due punti compaiono ciascuno due volte come interni, ed una come estremi del segmento; tre punti compaiono ciascuno una volta come interni, e due come estremi; quattro punti compaiono sempre come estremi.

Dicesi che tre rette, non giacenti tutte in uno stesso piano, appargono ad una stessa stella, se a due a due sono complanari. Se due di esse si incontrano, allora anche la terza passa pel loro punto d'intersezione. La costruzione precedente permette di condurre la retta passante pel punto e, e appartenente alla stella determinata dalle due rette ab e cd.

Si dimostra il teorema dei triangoli omologici anche per punti di un piano; la costruzione precedente risolve il problema di unire il punto e col punto inaccessibile d'incontro di due rette date, e la figura è tutta contenuta nel foglio del disegno, se questo è rettangolare o almeno convesso.

Il teorema dei triangoli omologici, nel piano, è però conseguenza del postulato XV, e quindi è un teorema di Geometria solida. Che esso non sia conseguenza dei postutati precedenti, risulta da ciò che se per p intendiamo i punti di una superficie, e con $c \, \varepsilon \, ab$ intendiamo di dire che il punto c sta sull'arco di geodetica che unisce i punti a e b, allora sono verificati tutti i postulati dall'I al XIV, e non sussiste sempre la proposizione sui triangoli omologici. Questa proposizione continua però a valere per le superficie a curvatura costante.

Arrivati al teorema di Desargues, si può continuare senz'altro lo studio della Geometria di posizione, i cui principii sono così analizzati. Ora si possono introdurre, mediante definizioni, i punti improprii o ideali, ecc. seguendo per es. il Pasch, nella sua opera citata.

Si è dimostrato il teorema V, il quale afferma che i piani che congiungono due rette giacenti in uno stesso piano con un punto fuori di questo piano, si incontrano secondo una retta. Per affermare che due piani qualunque, aventi un punto comune, hanno di comune una retta, occorre un nuovo postulato:

Postulato XVI. « Dato un piano p, ed un punto a fuori di esso, e preso un punto b sul prolungamento d'uno dei segmenti che vanno da a a qualche punto di p, allora comunque si prenda il punto x dello spazio, o esso giace nel piano p, o il segmento ax incontra il piano p, o il segmento bx incontra il piano p »:

$$p \mathrm{\varepsilon}\, \mathrm{p}_3 . a \mathrm{\varepsilon}\, \mathrm{p} . a - \mathrm{\varepsilon}\, p . b \mathrm{\varepsilon}\, a'p . x \mathrm{\varepsilon}\, \mathrm{p} . \supset . x \mathrm{\varepsilon}\, p . \cup . ax \cap p - = \Lambda . \cup . bx \cap p - = \Lambda .$$

Solo dopo questo postulato si può parlare delle due *bande* del piano.

La scrittura $a'p$ rappresenta il semispazio limitato del piano p, dalla parte opposta del punto a.

E arrivati al semispazio, è facile lo scorgere che cosa si intenda colla parola *spazio*. « Lo spazio è il luogo dei punti, o l'insieme di tutti i punti, o la classe dei punti ». Questa frase si traduce in simboli con « spazio = punto », benchè nella lingua nostra i due termini, spazio e punto, soddisfino a regole grammaticali distinte, come i termini « uomo e umanità », « soldato ed esercito », ecc.; in questi esempi, ed in analoghi, c'è nella lingua nostra una doppia nomenclatura; un termine (punto, soldato, ecc.) è usato specialmente come attributo; l'altro termine (spazio, esercito,...) come soggetto.

In alcune ricerche successive occorre il postulato detto della *continuità* della retta. Si può enunciare sotto la forma:

Post. XVII. « Data una figura convessa h, un punto a appartenente ad essa, ed un punto b fuori di essa, si può determinare un punto x interno al segmento ab, o coincidente con uno dei suoi estremi a, b, tale che il segmento ax appartenga alla figura h, e il segmento xb sia tutto fuori di h »:

$$h \mathrm{\varepsilon}\, \mathrm{Conv} . a, b \mathrm{\varepsilon}\, \mathrm{p} . a \mathrm{\varepsilon}\, h . b - \mathrm{\varepsilon}\, h . \supset : x \mathrm{\varepsilon}\, ab \cup \iota a \cup \iota b . ax \supset h . bx \supset - h . - =_x \Lambda .$$

Esso si può pure enunciare sotto la forma

$$a, b \mathrm{\varepsilon}\, \mathrm{p} . k \mathrm{\varepsilon}\, \mathrm{Kp} . k - = \Lambda . k \supset ab . \supset .\cdot. x \mathrm{\varepsilon}\, ab \cup \iota b . k \cap xb = \Lambda : y \mathrm{\varepsilon}\, ax . \supset_y . k \cap yb - = \Lambda : - =_x \Lambda .$$

« Dati due punti a e b, e una classe k di punti, classe effettivamente esistente, e contenuta nel segmento ab, allora si può determinare un punto x appartenente al segmento ab, o coincidente con b, tale che nessun punto della classe k appartenga al segmento xb, ma tale che comunque si prenda il punto y fra a ed x, sempre esistono punti della classe k compresi fra y e b ».

Per ricavare la seconda forma dalla prima, basta porre $h=ak \cup \iota a$, cioè chiamisi h la figura che si ottiene proiettando da a i varii punti di k, cui si aggiunga il punto a. Sarà h una figura convessa, contenente il punto a, e non contenente b; quindi, applicando il postulato XVII, si deduce la prop. a dimostrarsi.

E prima di abbandonare questo soggetto, sarà ancora utile un'osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinchè questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche. La Geometria di posizione, o proiettiva, poi, è una parte della Geometria generale; quindi i suoi postulati si debbono trovare fra quelli assunti per la Geometria generale.

In conseguenza, sotto il punto di vista pratico, non parmi lecito l'assumere ad es. come postulato su cui fondare la Geometria proiettiva il seguente:

« Due rette giacenti in uno stesso piano hanno sempre un punto comune », poichè questa proposizione non si verifica coll'osservazione, ed è anzi in contraddizione coi teoremi di Euclide.

La Geometria proiettiva parte dai postulati della Geometria elementare, e, con opportune *definizioni*, introduce nuovi enti, detti punti ideali (sia nella Geometria Euclidea, che nella non Euclidea), e ne risulta così che i nuovi enti ottenuti soddisfano alle proposizioni precedenti.

Sulle figure congruenti.

Analizzati così i principii di quella parte della geometria che è la Geometria di posizione, il nostra lavoro non sarebbe completo se non dicessimo qualche parola dei fondamenti della Geometria metrica, in cui comparisce il concetto di figure *eguali*, o *sovrapponibili*, o, come diremo abitualmente, *congruenti*, e quindi il concetto della sovrapposizione, o trasporto, o moto d'una figura.

Noi vediamo, nel mondo fisico, dei corpi rigidi a muoversi col variare del tempo. Possiamo studiare la successione delle infinite posizioni che assume il corpo; ovvero possiamo limitarci ad esaminare i rapporti fra due posizioni della figura, la prima e l'ultima, senza occuparci delle posizioni intermedie assunte dal corpo nel passare dall'una all'altra. Questo solo studio particolare è fatto da Euclide, e si può considerare come studio geometrico. Il primo studio, più generale e molto più complicato, fa parte della Cinematica, e si può escludere dalla

Geometria. Quindi mi pare conveniente di escludere da un libro di geometria elementare le seguenti proposizioni e simili:

« Un punto movendosi descrive una linea ».

« Un punto che percorra la retta, non può passare dall'una banda all'opposta di un punto fisso *m* di questa retta senza coincidere una volta con esso ».

Mettendoci adunque dal primo punto di vista, se *m* è un moto, ed *a* è un punto dello spazio, risulta determinato un nuovo punto, che indicheremo con *ma*, e che si chiama « la nuova posizione che ha il punto *a* dopo il moto *m* ». Quindi il moto è una trasformazione di punti in punti; in simboli: moto $\supset$ p f p.

Invece di parlare del moto, si può parlare, come è chiaro, di figure eguali; il moto *m* è allora la corrispondenza per cui, dato un punto *a* della prima figura, risulta determinato l'omologo *ma* della seconda.

L'analisi del concetto di moto, e la determinazione dei postulati fondamentali, si può fare seguendo la solita via. Si scrivano tutte le proprietà che risultano dall'osservazione del moto fisico. Si scindano queste proposizioni in tante affermazioni semplici; e poi si esamini quali di queste affermazioni sono già implicitamente contenute nelle rimanenti. Procedendo avanti in qnesto esame, finchè sarà possibile, troveremo un gruppo di proposizioni esprimenti verità irreduttibili fra loro, e che costituiscono i postulati del moto.

Il Pasch, a pag. 101 della sua *neuere Geometrie,* più volte menzionata, stabilisce dieci postulati sul moto. Indichiamo col segno $\backsimeq$ la congruenza delle due figure fra cui sta quel segno; con (a, b), (a, b, c) ecc. la figura composta dei punti a e b, a, b e c, ... I postulati del Pasch sono:

1. $a, b \, \varepsilon \, \mathrm{p} \, . \supset . \, (a, b) \backsimeq (b, a)$

cioè un segmento *ab* si può trasportare in modo che *a* coincida con *b*, e *b* con *a*. Questo postulato dice che ogni segmento si può rovesciare.

2. $a, b, c \, \varepsilon \, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \, . \supset : b_1 \, \varepsilon \, \mathrm{Sr}\,(a, b) \, . \, (a, b_1) \backsimeq (a, c) \, . -=_{b_1} \Lambda \, .$

Dati tre punti a, b, c non collineari, si può portare il raggio ac su ab; ed il punto c verrà ad assumere una posizione b_1 su ab, tale che ab_1 sia congruente ad ac.

3. $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \, \varepsilon \, \mathrm{p} \, . \, (a, b, c) \backsimeq (a_1, b_1, c_1) \, . \, c \, \varepsilon \, ab \, . \supset . \, c_1 \, \varepsilon \, a_1 b_1 \, .$

Date due terne di punti a, b, c, e a_1, b_1, c_1, se le figure (a, b, c) e (a_1, b_1, c_1) sono congruenti, e se c giace nel segmento fra a e b, anche c_1 giace fra a_1 e b_1.

4. Se il punto c_1 giace fra a e b, e si prolunga il segmento ac_1

del segmento $c_1 c_2$ congruente ad ac_1, e questo d'un nuovo segmento $c_2 c_3$ eguale ai precedenti, e così via, si arriverà sempre ad un segmento $c_n\, c_{n+1}$ che conterrà il punto b.

5. Se nella figura *abc* i segmenti *ac* e *bc* sono congruenti, anche le figure *abc* e *bac* sono congruenti: $a,b,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} . ac \backsimeq bc . \supset . (a,b,c) \backsimeq (b,a,c)$. In conseguenza l'angolo *abc* si può rovesciare.

6. Se due figure sono congruenti, anche le parti omologhe sono congruenti.

7. Due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.

8. Date due figure congruenti α e β, e preso un punto x, si può determinare un punto y in guisa che la figura che si ottiene unendo alla figura α il punto x sia congruente colla figura ottenuta aggiungendo alla β il punto y.

9. Dato un triangolo *fgh*, ed un segmento *ab* congruente ad *fg*, ed un semipiano limitato dalla retta *ab*, si può in questo semipiano determinare uno ed un sol punto c, tale che il triangolo *abc* sia congruente ad *fgh*.

10. Se a, b, c, d sono punti non complanari, ed e è un punto diverso da d, le figure *abcd* ed *abce* non sono congruenti.

Accenneremo qui ad una nuova via per trattare del moto, considerandolo come una speciale affinità.

Affinità.

Dicesi affinità (abbreviato in Aff), ogni corrispondenza m fra punto e punto dello spazio, tale che se il punto c giace fra a e b, anche fra i loro corrispondenti mc, ma ed mb passi la stessa relazione.

1. $\quad \mathrm{Aff} = (\mathrm{p\,f\,p}) \frown \overline{m\,\varepsilon} \,[a , b \,\varepsilon\, \mathrm{p} . c \,\varepsilon\, ab . \supset_{a.b,c} . mc \,\varepsilon\, (ma)(mb)]$.

Ne risulta

2. $\quad m \,\varepsilon\, \mathrm{Aff} . a , b \,\varepsilon\, \mathrm{p} . a -= b . \supset . ma -= mb$.

« Se m è un'affinità, a due punti distinti a e b corrispondono due punti ma ed mb pure distinti ». Invero se a e b sono distinti, si potrà determinare un punto c compreso fra essi (post. IV); quindi per def. dell' Aff, anche mc sarà compreso fra ma ed mb, e quindi (post. III) ma ed mb sono distinti.

3. $\quad m \,\varepsilon\, \mathrm{Aff} . a , b \,\varepsilon\, \mathrm{p} . c \,\varepsilon\, a'b . \supset . mc \,\varepsilon\, (ma)'(mb)$.

« Se il punto c sta sul prolungamento di ab, anche mc sta sul prolungamento di (ma) (mb) ». Questa proposizione si ottiene dalla definizione dell'affinità, scambiando b con c.

A tre punti collineari corrisondono, nell'affinità, punti collineari; a punti complanari, punti complanari.

4. $m \varepsilon \mathrm{Aff} . a , b , c \varepsilon \mathrm{p\,Coll} . \supset . ma , mb , mc \varepsilon \mathrm{Coll}$.
5. » $. a , b , c \varepsilon \mathrm{p} . d \varepsilon abc . \supset . md \varepsilon (ma)(mb)(mc)$.
6. » $. a , b , c\, d \varepsilon \mathrm{p} . e \varepsilon abcd . \supset . me \varepsilon (ma)(mb)(mc)(md)$.
7. $m , n \varepsilon \mathrm{Aff} . \supset . mn \varepsilon \mathrm{Aff}$.

Cioè se m, n sono due affinità, anche il loro prodotto è un'affinità, vale a dire se di una figura si fa la figura affine coll'affinità n, e di questa si fa la figura affine coll'affinità m, allora la terza figura è pure affine alla prima.

Fra le corrispondenze è pure a considerarsi l'*identità*, per cui ad ogni ente si fa corrispondere sè stesso. Indichiamola con ω, cioè poniamo, qualunque sia a,

$$\omega a = a .$$

Si avrà che l'identità è pure un'affinità, ossia

8. $\omega \varepsilon \mathrm{Aff}$.

Se m è un'affinità, ogni punto del segmento ab ha per corrispondente un punto del segmento $(ma)(mb)$; ed inoltre (prop. 2), a punti distinti corrispondono punti distinti; quindi la figura corrispondente al segmento ab è contenuta nel segmento $(ma)(mb)$; possiamo noi affermare che essa sia il segmento $(ma)(mb)$? Ecco una questione di cui non conosco la soluzione.

Postulati del moto.

Scriveremo μ invece della parola *moto*; e porremo i postulati seguenti:

Post. 1. $\mu \supset \mathrm{Aff}$.

« Ogni moto è un'affinità ». Ciò equivale a dire che:

(1) $m \varepsilon \mu . a , b \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ab . \supset . mc \varepsilon (ma)(mb)$. Esso è il post. 3 del Pasch.

Quindi pel moto sussistono tutte le proprietà dell'affinità gia viste.

Post. 2. $\omega \varepsilon \mu$.

« L'identità è un moto », cioè a dire ogni figura è congruente a sè stessa. È l'assioma (o cognizione comune) VII di Euclide, libro I.

Post. 3. $m \varepsilon \mu . \supset . \overline{m} \varepsilon \mu$.

« Se m è un moto, anche la trasformazione inversa, $\overline{m}$, è pure un

moto », cioè se la figura A si può portare a coincidere colla B, anche la B si può portare a coincidere colla A; ossia se la figura A è congruente colla B, anche la B è congruente colla A.

Dalla proprietà (1) si deduce, esportando le due prime parti dell'ipotesi:

$$m \varepsilon \mu \,.\, a\,, b \varepsilon \mathrm{p} \,.\supset .\, m\,(ab) \supset (ma)\,(mb) \qquad (\alpha)$$

cioè il segmento ab, dopo il trasporto è contenuto nel segmento determinato dai punti ma ed mb. Se in questa, al posto di m leggo $\overline{m}$, ed al posto di a e b leggo ma ed mb, si ha:

$$\overline{m} \varepsilon \mu \,.\, ma\,, mb \varepsilon \mathrm{p} \,.\supset .\, \overline{m}\,\big((ma)(mb)\big) \supset (\overline{m}\, ma)\,(\overline{m}\, mb)$$

ossia osservando che dall'ipotesi $m \varepsilon \mu \,.\, a\,, b \varepsilon \mathrm{p}$, si deduce $\overline{m} \varepsilon \mu \,.\, ma\,, mb \varepsilon \mathrm{p}$, e che $\overline{m}\, ma = a$, $\overline{m}\, mb = b$, si ha:

$$m \varepsilon \mu \,.\, a\,, b \varepsilon \mathrm{p} \,.\supset .\, (ma)\,(mb) \supset m\,(ab) \,. \qquad (\beta)$$

Dalle proposizioni α e β si ricava:

(2) $$m \varepsilon \mu \,.\, a\,, b \varepsilon \mathrm{p} \,.\supset .\, m\,(ab) = (ma)\,(mb)\,,$$

cioè il segmento ab, dopo il trasporto, coincide col segmento limitato dalle nuove posizioni di a e di b.

In conseguenza ogni figura ottenuta da più punti congiungendoli con segmenti, o prolungando questi segmenti, si trasforma, nel moto, nella figura analoga costituita colle nuove posizioni dei punti. Quindi, se m è un moto, $a\,, b\,, c\,, d \varepsilon \mathrm{p}$, si ha:

$$\begin{array}{l}
m\,(a'b) = (ma)'\, mb \\
m\, \mathrm{Sr}\,(a\,, b) = \mathrm{Sr}\,(ma\,, mb) \\
m\, \mathrm{retta}\,(a\,, b) = \mathrm{retta}\,(ma\,, mb) \\
m\, \mathrm{Co\, Sr}\,(a\,, b) = \mathrm{Co}\, m\, \mathrm{Sr}\,(a\,, b) = \mathrm{Co\, Sr}\,(ma\,, mb) \\
m\,(abc) = (ma)\,(mb)\,(mc) \\
m\,(abcd) = (ma)\,(mb)\,(mc)\,(md) \\
m\, \mathrm{piano}\,(a\,, b\,, c) = \mathrm{piano}\,(ma\,, mb\,, mc) \\
m\, \mathrm{Sp}\,(ab\,, c) = \mathrm{Sp}\,(ma\,, mb\,, mc) \\
m\, \mathrm{Co\, Sp}\,(ab\,, c) = \mathrm{Co}\, m\, \mathrm{Sp}\,(ab\,, c)\,,
\end{array}$$

ecc.

Post. IV. $m\,, n \varepsilon \mu \,.\supset .\, mn \varepsilon \mu \,.$

« Se m ed n sono moti, anche la loro successione è un moto », cioè se la figura A può portarsi a coincidere colla B, e la B può portarsi a coincidere colla C, anche la A può portarsi a coincidere colla C; in altri termini due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.

Il postulato II è conseguenza dei postulati III, IV e dell'esistenza d'un moto. Invero, se m è un moto, anche $\overline{m}$ è un moto, quindi anche $m\,\overline{m} = \omega$ è un moto.

Le proposizioni precedenti dicono che i moti costituiscono un gruppo delle trasformazioni dette affinità, gruppo che contiene l'identità, l'inverso d'ogni moto, e il prodotto, o successione di due moti.

Rimane a distinguere il gruppo dei moti delle altre affinità.

Perciò enuncieremo come postulati le seguenti cognizioni comuni.

Post. V. Dati due punti a , a_1 , si può portare a in a_1:

$$a\,,\, a_1 \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\supset:\, m \,\varepsilon\, \mu \,.\, ma = a_1 \,.\, -=_m \Lambda \,.$$

Post. VI. Dati tre punti a , b , b_1 si può, tenendo fisso il punto a, far coincidere il raggio ab col raggio ab_1 :

$$a,b,b_1 \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, a -= b \,.\, a -= b_1 \,.\supset:\, m \,\varepsilon\, \mu \,.\, ma = a \,.\, m\mathrm{Sr}(a,b) = \mathrm{Sr}(a,b_1) \,.\, -=_m \Lambda \,.$$

Post. VII. Dati i due punti distinti a e b, e i punti c e c_1 fuori della retta ab, si può, tenendo fisso il punto a e il raggio (a,b), far coincidere il semipiano $(ab\,,c)$ con $(ab\,,c_1)$:

$$a\,,b \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, a -= b \,.\, c\,,c_1 \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{retta}\,(a\,,b) \,.\supset:\, m \,\varepsilon\, \mu \,.\, ma = a \,.\, m\,\mathrm{Sr}(a,b)$$
$$= \mathrm{Sr}\,(a\,,b) \,.\, m\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c) = \mathrm{Sp}\,(ab\,,c_1) - =_m \Lambda \,.$$

I postulati V, VI e VII si possono riunire in questa sola proposizione:

Teorema. Dati i punti a , b , c non collineari, ed i punti a_1 , b_1 , c_1 non collineari, si può sempre determinare un moto, che trasformi a in a_1 , il raggio $(a\,,b)$ in raggio $(a_1\,,b_1)$, e il semipiano $(ab\,,c)$ in semipiano $(a_1b_1\,,c_1)$.

$$a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\, a_1\,,b_1\,,c_1 \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\supset:\, m \,\varepsilon\, \mu \,.\, ma = a_1 \,.\, m\,\mathrm{Sr}\,(a,b)$$
$$= \mathrm{Sr}\,(a_1\,,b_1) \,.\, m\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c) = \mathrm{Sp}\,(a_1b_1\,,c_1) \,.\, - =_m \Lambda \,.$$

Ora dovremo dire che questo moto è determinato:

Post. VIII. $a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\, m\,,n \,\varepsilon\, \mu \,.\, ma = na \,.\, m\,\mathrm{Sr}\,(a\,,b) = n\,\mathrm{Sr}\,(a\,,b) \,.\, m\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c) = n\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c) \,.\supset.\, m = n$.

Indicheremo con $\begin{pmatrix} a_1 & \mathrm{Sr}\,(a_1\,,b_1) & \mathrm{Sp}\,(a_1b_1\,,c_1) \\ a & \mathrm{Sr}\,(a\,,b) & \mathrm{Sp}\,(ab\,,c) \end{pmatrix}$ quel moto che trasforma a in a_1 , la $\mathrm{Sr}\,(a\,,b)$ in $\mathrm{Sr}\,(a_1\,,b_1)$, e il $\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)$ in $\mathrm{Sp}\,(a_1b_1\,,c_1)$; cioè porremo

Def. $a\,,b\,,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\, a_1, b_1, c_1 \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} .\supset. \begin{pmatrix} a_1 & \mathrm{Sr}\,(a_1,b_1) & \mathrm{Sp}\,(a_1b_1,c_1) \\ a & \mathrm{Sr}\,(a,b) & \mathrm{Sp}\,(ab,c) \end{pmatrix}$
$= \mu \frown \overline{m} \,\varepsilon\, [ma = a_1 \,.\, m\,\mathrm{Sr}\,(a\,,b) = \mathrm{Sr}\,(a_1\,,b_1) \,.\, m\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c) = \mathrm{Sp}\,(a_1b_1\,,c_1)]$.

I postulati V-VIII si possono condensare in questa unica proposizione:

$$a,b,c \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\, a_1\,,b_1\,,c_1 \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} .\supset. \begin{pmatrix} a_1 & \mathrm{Sr}(a_1,b_1) & \mathrm{Sp}(a_1b_1,c_1) \\ a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \end{pmatrix} \varepsilon\, \mu \,.$$

Simmetria assiale.

Siano a, b, c tre punti non collineari.

L'identità ω sarà rappresentata da

(1) $$\omega = \begin{pmatrix} a & \mathrm{Sr}(a, b) & \mathrm{Sp}(ab, c) \\ a & \mathrm{Sr}(a, b) & \mathrm{Sp}(ab, c) \end{pmatrix}.$$

Noi considereremo tre moti assai importanti, che chiameremo α, β, γ, e sono:

(2) $$\alpha = \begin{pmatrix} a & \mathrm{Sr}(a, b) & \mathrm{Co\,Sp}(ab, c) \\ a & \mathrm{Sr}(a, b) & \mathrm{Sp}(ab, c) \end{pmatrix} = \left(a, \mathrm{Sr}(a, b), \frac{\mathrm{Co\,Sp}(ab, c)}{\mathrm{Sp}(ab, c)}\right)$$

(3) $$\beta = \begin{pmatrix} a & \mathrm{Co\,Sr}(a, b) & \mathrm{Sp}(ab, c) \\ a & \mathrm{Sr}(a, b) & \mathrm{Sp}(ab, c) \end{pmatrix} = \left(a, \frac{\mathrm{Co\,Sr}(a, b)}{\mathrm{Sr}(a, b)}, \mathrm{Sp}(ab, c)\right)$$

(4) $$\gamma = \begin{pmatrix} a & \mathrm{CoSr}(a,b) & \mathrm{CoSp}(ab,c) \\ a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \end{pmatrix} = \left(a, \frac{\mathrm{CoSr}(a,b)}{\mathrm{Sr}(a,b)}, \frac{\mathrm{CoSp}(ab,c)}{\mathrm{Sp}(ab,c)}\right).$$

Gli ultimi membri di queste eguaglianze sono modi abbreviati per indicare un moto, quando alcuni elementi rimangono fissi. Si ha immediatamente

(5) $$\alpha^2 = \omega. \qquad \beta^2 = \omega. \qquad \gamma^2 = \omega.$$

(6) $$\alpha\beta = \beta\alpha = \gamma. \qquad \alpha\gamma = \gamma\alpha = \beta. \qquad \beta\gamma = \gamma\beta = \alpha.$$

cioè ciascuno dei moti α, β, γ ripetuto due volte, produce l'identità; e la successione di due di essi produce il terzo.

Infatti si ha, per definizione di α, $\alpha\, a = a$, onde $\alpha^2\, a = \alpha a = a$.

Dalla definizione si ha pure $\alpha\,\mathrm{Sr}(a, b) = \mathrm{Sr}(a, b)$, onde $\alpha^2 \mathrm{Sr}(a,b) = \mathrm{Sr}(a, b)$.

Dalla definizione si ha $\alpha\,\mathrm{Sp}(ab, c) = \mathrm{Co\,Sp}(ab, c)$; onde $\alpha^2\,\mathrm{Sp}(ab,c) = \alpha\,\mathrm{Co\,Sp}(ab, c) = \mathrm{Co}\,\alpha\,\mathrm{Sp}(ab, c) = \mathrm{Co\,Co\,Sp}(ab, c) = \mathrm{Sp}(ab, c)$.

Pertanto il moto α^2 lascia inalterati a, $\mathrm{Sr}(a, b)$, $\mathrm{Sp}(ab, c)$, perciò esso è l'identità ω.

Analogamente si provano le altre eguaglianze.

Teorema. « Il moto α lascia fisso ogni punto b della retta ab ».

(7) $$\alpha b = b.$$

Infatti, poichè $b \,\varepsilon\, \mathrm{Sr}(a, b)$, la quale semiretta non si altera col moto α, anche αb apparterrà a $\mathrm{Sr}(a, b)$. Ora $\mathrm{Sr}(a, b) = ab \cup \iota b \cup a'b$, vale a dire il punto αb o giacerà nel segmento ab, o coincide col suo estremo b, o giace nel suo prolungamento $a'b$.

Se αb giace nel segmento ab, $\alpha^2 b$ giacerà nel segmento $a(\alpha b)$, e

quindi a maggior ragione (post. VIII della Geom.) giacerà nel segmento ab; ma $\alpha^2 b$ coincide con b; ed il punto b non appartiene al segmento ab; dunque è assurdo che αb giaccia in ab.

Scambiando in questo ragionamento b con αb, si prova che è assurdo il dire che αb giaccia sul prolungamento di ab.

Dunque αb coincide con b.

Definizione. Dicesi che il raggio ab è perpendicolare al raggio ac, e scriveremo $\mathrm{Sr}\,(a, b) \perp \mathrm{Sr}\,(a, c)$, se tenendo fisso il punto a e il raggio ab, e scambiando il semipiano (ab, c) nel suo complemento, il raggio (a, c) si trasforma nel suo complemento:

$$(8) \qquad \mathrm{Sr}(a,b) \perp \mathrm{Sr}(a,c) .=. \left(a, \mathrm{Sr}(a,b), \frac{\mathrm{CoSp}(ab,c)}{\mathrm{Sp}(ab,c)}\right)\mathrm{Sr}(a,c) = \mathrm{CoSr}(a,c).$$

Ne risulta

$$(9) \qquad \mathrm{Sr}(a,b) \perp \mathrm{Sr}(a,c) .=. \mathrm{Sr}(a,b) \perp \mathrm{CoSr}(a,c) .=. \mathrm{CoSr}(a,b) \perp \mathrm{Sr}(a,c)$$

cioè se il primo raggio è perpendicolare al secondo, il primo è pure perpendicolare al complemento del secondo; invero se la trasformazione considerata α trasforma il saggio ac nel suo complemento, poichè $\alpha^2 = \omega$, essa trasformerà pure il complemento nel raggio stesso. E se il primo raggio è perpendicolare al secondo, anche il complemento del primo è perpendicolare al secondo, poichè la trasformazione α non si altera scambiando il raggio ab col suo complemento.

In conseguenza, date due rette ab ed ac, diremo che la prima è perpendicolare alla seconda, se esse si incontrano in un punto a, e se prendendo sia sulla prima che sulla seconda retta uno dei raggi partenti da a, il raggio preso sulla prima è perpendicolare a quello preso sulla seconda; poichè questa proprietà è indipendente dalla scelta dei raggi considerati.

Teorema. Essendo a, b, c punti non collineari, la retta ab è perpendicolare alla retta che unisce il punto c col punto αc, essendo α la trasformazione $\left(a, \mathrm{Sr}\, ab, \frac{\mathrm{Co\,Sp}\,(ab, c)}{\mathrm{Sp}\,(ab, c)}\right)$:

$$(10) \qquad \text{retta}\,(a, b) \perp \text{retta}\,(c, \alpha c).$$

Infatti, poichè c appartiene a $\mathrm{Sp}\,(ab, c)$, il quale, pel moto α, si trasforma nel suo complemento, il punto αc appartiene a $\mathrm{CoSp}(ab,c)$; quindi il segmento $c\,(\alpha c)$ incontra la retta (a, b) in un punto x, che ha per corrispondente sè stesso. Dunque $\alpha\,\mathrm{Sr}\,(x,c) = \mathrm{Sr}\,(x, \alpha c) = \mathrm{CoSr}(x,c)$; dunque il raggio (x, c) colla rotazione α si trasforma nel suo complemento, ossia la retta ab è perpendicolare alla xc, cioè alla $c\,(\alpha c)$.

Questa proposizione permette di risolvere il problema: « Data la

retta ab, ed il punto c fuori di essa, segnare sulla retta ab il punto x tale che $ab \perp xc$ ».

Si osservi che il segmento $c(\alpha c)$ si può rovesciare, poichè colla trasformazione α, c va in αc, ed αc in c.

Teorema. Nel piano abc esiste un raggio ax che non si altera col moto β:

(11) $\quad x \mathrel{\varepsilon} \mathrm{Sp}(ab, c) . \beta\, \mathrm{Sr}(a, x) = \mathrm{Sr}(a, x) . -=_x \Lambda$.

Infatti prendasi nel semipiano (ab, c) un punto qualunque c. Siano βb e βc i corrispondenti di b e di c nella trasformazione β. Poichè b sta su $\mathrm{Sr}(a, b)$, che nel moto β si trasforma nel suo complemento, βb starà su $\mathrm{Co\,Sr}(a, b)$; e poichè il semipiano (ab, c) si trasforma in sè stesso, e c appartiene a questo semipiano, anche βc vi apparterrà.

Se βc appartiene al raggio (a, c), il raggio (a, c) avrà per corrispondente $(a, \beta c)$ ossia lo stesso raggio (a, c); dunque il raggio (a, c) non varia nel movimento β, e la proposizione è dimostrata.

Se βc non appartiene al raggio (a, c), le rette $(b, \beta b)$ e $(c, \beta c)$ non hanno alcun punto comune; poichè se x è un punto comune a queste rette, anche βx sarà un punto comune alle due rette; e sarà $\beta x -= x$, poichè l'uno di questi punti sta su $\mathrm{Sr}(a, b)$, e l'altro sul suo complemento; quindi le due rette distinte date avrebbero due punti comuni, il che è assurdo.

Pertanto, essendo b, βb, c, βc complanari, e le rette $(b, \beta b)$ e $(c, \beta c)$ non incontrandosi, ne avviene che o il segmento $b(\beta c)$ incontra $c(\beta b)$, o il segmento bc incontra $(\beta b)(\beta c)$. Sia x il loro punto d'incontro. Poichè colla trasformazione β il primo segmento si trasforma nel secondo, ed il secondo nel primo, ne risulta che il punto x non varia colla trasformazione β; e quindi il raggio ax non si altera col moto β.

Quindi il moto β si può ridurre alla forma

$$\left(a, \mathrm{Sr}(a, x), \frac{\mathrm{Co\,Sp}(ax, b)}{\mathrm{Sp}(ax, b)}\right)$$

ossia ha la stessa forma del moto α, in cui al posto di b e di c si legga x e b.

La proposizione precedente permette di risolvere il problema:

Data una retta ab, ed un piano abc, passante per essa, innalzare nel punto a la retta ax, contenuta nel piano abc, e tale che $ax \perp ab$.

Teorema. Il movimento γ fa corrispondere ad ogni punto d del piano abc un punto del complemento del raggio ad:

(12) $\quad d \mathrel{\varepsilon} \mathrm{piano}(a, b, c) . d -= a . \supset . \gamma d \mathrel{\varepsilon} \mathrm{Co\,Sr}(a, d)$.

Infatti se d appartiene al Sp (ab, c), poichè γ Sp(ab,c)=CoSp(ab,c), γd apparterrà a Co Sp (ab, c); perciò il segmento $d(\gamma d)$ che unisce due punti appartenenti a bande diverse della retta ab, incontra questa retta in un punto x, tale che $x \varepsilon d(\gamma d)$ e $x \varepsilon$ retta (a, b).

Il punto x della retta ab, o coincide con a, o giace su Sr (a, b), o su Co Sr (a, b).

Se $x \varepsilon$ Sr (a, b), e $x \varepsilon d(\gamma d)$, operando colla γ, si ha:

$$\gamma x \,\varepsilon\, \mathrm{Co\,Sr}\,(a, b) \text{ e } \gamma x \,\varepsilon\, (\gamma d)\, d,$$

dunque il segmento $d(\gamma d)$, che incontra il raggio (a, b) in x, incontra pure il suo prolungamento in γx, il che è assurdo.

Parimenti è assurdo che $d(\gamma d)$ incontri Co Sr (a, b); dunque $d(\gamma d)$ incontra la retta (a, b) precisamente in a, ossia $a \varepsilon d(\gamma d)$, da cui $\gamma d \varepsilon d'a$, c. v. d.

A Sr (a, d) corrisponderà perciò γ Sr (a,d)=Sr $(a, \gamma d)$=Co Sr (a,d).

Teorema. Se il raggio ac è perpendicolare al raggio ab, sarà il raggio ab perpendicolare ad ac:

$$(13) \qquad a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{p-Coll}\,.\, \mathrm{Sr}\,(a, c) \perp \mathrm{Sr}\,(a, b) \,.\, \supset .\, \mathrm{Sr}\,(a, b) \perp \mathrm{Sr}\,(a, c)\,.$$

In altre parole, se facendo rotare ab attorno ad ac di 180°, il raggio ab si trasforma nel suo complemento, viceversa facendo rotare ac attorno ad ab di 180°, il raggio ac si trasforma nel suo complemento. Infatti si tratta di dimostrare che α Sr (a, c) = Co Sr (a, c). Ora il moto α equivale al moto $\gamma \beta$; quindi α Sr $(a, c) = \gamma \beta$ Sr (a, c). Ma β Sr(a,c) = Sr (a, c), poichè nella trasformazione β il raggio (a, c) non varia; dunque α Sr $(a, c) = \gamma$ Sr (a, c). Ma γ Sr (a, c) = Co Sr (a, c); dunque α Sr (a, c) = Co Sr (a, c).

Teorema 14. Gli angoli piani, opposti al vertice, sono eguali.

Infatti essendo a, b, c tre punti non collineari, l'angolo formato da Sr (a, b) e Sr (a, c) ove si applichi il movimento γ, si trasforma nell'angolo formato da Co Sr (a, b) e Co Sr (a, c), che è l'opposto al vertice dell'angolo precedente.

Teorema. Essendo a, b, c, d quattro punti non complanari, se la retta ab è perpendicolare sia alla ac che alla ad, allora la retta ab è perpendicolare ad ogni retta ae contenuta nel piano acd.

$$(15) \qquad a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p-Compl}\,.\, \mathrm{Sr}\,(a, b) \perp \mathrm{Sr}\,(a,c)\,.\, \mathrm{Sr}\,(a, b) \perp \mathrm{Sr}\,(a,d)\,.$$
$$e \,\varepsilon\, \mathrm{piano}\,(a, c, d)\,.\, e -= a \,.\, \supset .\, \mathrm{Sr}\,(a, b) \perp \mathrm{Sr}\,(a, e)\,.$$

Infatti, dalle ipotesi fatte, risulta che la trasformazione

$$\alpha = \left(a, \mathrm{Sr}\,(a, b), \frac{\mathrm{Co\,Sp}\,(a, b, c)}{\mathrm{Sp}\,(ab, c)}\right)$$

è tale che $\alpha\,\mathrm{Sr}\,(a,c) = \mathrm{Co\,Sr}\,(a\,,c)$, e $\alpha\,\mathrm{Sr}\,(a,d) = \mathrm{Co\,Sr}\,(a\,,d)$; quindi $\alpha\,\mathrm{Sp}\,(ac\,,d) = \mathrm{Co\,Sp}\,(ac\,,d)$; quindi

$$\alpha = \left(a\,, \frac{\mathrm{Co\,Sr}\,(a\,,c)}{\mathrm{Sr}\,(a\,,c)}\,, \frac{\mathrm{Co\,Sp}\,(ac\,,d)}{\mathrm{Sp}\,(ac\,,d)}\right),$$

ossia la trasformazione α si ottiene dalla γ, ove alle lettere a, b, c si sostituiscano a, c, d. Perciò essendo e un punto del piano acd diverso da a, sarà $\alpha\,\mathrm{Sr}\,(a\,,e) = \mathrm{Co\,Sr}\,(a\,,e)$, ossia $\mathrm{Sr}\,(a\,,b) \perp \mathrm{Sr}\,(a\,,e)$.

La retta ab, perpendicolare a due rette ac e ad contenute in un piano, e quindi perpendicolare a tutte le rette ae contenute in esso, dicesi perpendicolare al piano.

Teorema 16. Essendo a, b, c, d quattro punti non complanari, il moto $\alpha = \left(a\,, \mathrm{Sr}\,(a\,,b)\,, \frac{\mathrm{Co\,Sp}\,(ab\,,c)}{\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)}\right)$ trasforma il semipiano $(ab\,,d)$ nel suo complemento.

$$\alpha\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,d) = \mathrm{Co\,Sp}\,(ab\,,d)\,.$$

Infatti il piano perpendicolare ad ab in a incontri il semipiano $(ab\,,d)$ secondo $\mathrm{Sr}\,(a\,,e)$. Si avrà $\alpha\,\mathrm{Sr}\,(a\,,e) = \mathrm{Co\,Sr}\,(a\,,e)$; quindi $\alpha\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,e) = \mathrm{Co\,Sp}\,(ab\,,e)$; ossia $\alpha\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,d) = \mathrm{Co\,Sp}\,(ab\,,d)$.

In conseguenza il moto chiamato α non varia se al posto di a mettiamo un punto qualunque della retta $(a\,,b)$; e non varia se al posto di c mettiamo un punto qualunque dello spazio. Esso è perciò caratterizzato dalla sola retta ab. Il moto α dicesi *simmetria* rispetto all'asse ab, o rotazione di 180° attorno ad ab.

Se la retta ab si chiama r, il moto α si chiamerà S_r. La simmetria assiale è un movimento assai importante poichè ogni moto è il prodotto di due simmetrie. Si ha $S_r{}^2 = \omega$, e $S_r = \overline{S_r}$, cioè una simmetria ripetuta due volte dà l'identità, ed ogni simmetria è l'inversa di sè stessa.

Il moto β si è visto che si ottiene dall'α con una permutazione di lettere; quindi detta ac la retta $\perp$ alla retta ab contenuta nel piano abc, sarà $\beta = S_{ac}$. Anche il moto γ è una simmetria assiale. Infatti in a si conduca il piano perpendicolare alla ab, che incontri il piano abc secondo ac; in esso si innalzi la perpendicolare ad alla ac. Sarà $\mathrm{Sr}\,(a\,,d) \perp \mathrm{Sr}\,(a\,,c)$ per costruzione; e $\mathrm{Sr}\,(ad) \perp \mathrm{Sr}\,(a,b)$, poichè $\mathrm{Sr}(a,b)$ è perpendicolare ad ogni $\mathrm{Sr}\,(a\,,d)$ contenuta nel piano perpendicolare al primo. Ora $\gamma\,\mathrm{Sr}\,(a\,,d) = \alpha\,\beta\,\mathrm{Sr}\,(a\,,d)$, poichè $\gamma = \alpha\,\beta$. Ma, essendo $\mathrm{Sr}\,(a\,,d) \perp \mathrm{Sr}\,(a\,,c)$, sarà $\beta\,\mathrm{Sr}\,(a\,,d) = \mathrm{Co\,Sr}\,(a\,,d)$, ed essendo $\mathrm{Sr}(a,d) \perp \mathrm{Sr}\,(a\,,b)$, sarà $\alpha\,\mathrm{Sr}\,(a,d) = \mathrm{Co\,Sr}\,(a,d)$, quindi $\alpha\,\mathrm{CoSr}(a,d) = \mathrm{Sr}(a,d)$; onde $\gamma\,\mathrm{Sr}\,(a\,,d) = \mathrm{Sr}\,(a\,,d)$, ossia $\mathrm{Sr}\,(a\,,d)$ si riproduce inalterato col moto γ.

Adunque, dati tre assi a due a due perpendicolari, il prodotto della

simmetria rispetto al primo per la simmetria rispetto al secondo dà la simmetria rispetto al terzo.

Traslazione.

Essendo a, b, c punti non collineari, pongasi

$$\tau = \begin{pmatrix} b & \mathrm{Co\,Sr}(b, a) & \mathrm{Sp}(ab, c) \\ a & \mathrm{Sr}(a, b) & \mathrm{Sp}(ab, c) \end{pmatrix}.$$

Il moto τ dicesi la traslazione lungo la retta ab, nel piano abc che trasporta a in b.

Teorema 1. I punti a, τa, $\tau^2 a$, ... τ^{-1}, $\tau^{-2} a$, ... stanno sulla retta ab, ed essendo m un intero positivo, o nullo, o negativo, il punto $\tau^m a$ giace fra $\tau^{m-1} a$ e $\tau^{m+1} a$.

Infatti, per definizione, $\tau a = b$; e poichè b sta su $\mathrm{Sr}(a, b)$, la quale ha per corrispondente $\mathrm{Co\,Sr}(b, a) = a'b$, τb giacerà su $a'b$, cioè $\tau b \,\varepsilon\, a'b$, ossia $b \,\varepsilon\, a(\tau b)$, o ancora $\tau a \,\varepsilon\, a(\tau^2 a)$.

Moltiplicando per τ^{n-1} si avrà $\tau^n a \,\varepsilon\, (\tau^{n-1} a)(\tau^{n+1} a)$, che è la proposizione a dimostrarsi.

Si deduce che se p, q, r sono interi, n, e $p < q < r$, il punto $\tau^q a$ giace fra $\tau^p a$ e $\tau^r a$.

Teorema 2. Essendo a, b, c punti non collineari, e d un punto del prolungamento di ab, si può determinare un numero intero positivo n, in guisa che il punto d giaccia fra a e la posizione che assume a dopo n traslazioni $\tau = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \mathrm{Sp}(ab, c)\Big)$:

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{p-Coll} \,.\, d \,\varepsilon\, a'b \,.\, \supset : n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, d \,\varepsilon\, a(\tau^n a) \,.\, - =_n \Lambda \,.$$

Infatti, poniamo per assurdo che qualunque sia il numero n, sempre d sia fuori del segmento compreso fra a e $\tau^n a$.

Allora consideriamo l'insieme dei punti τa, $\tau^2 a$, ... cioè $\tau^{\mathrm{N}} a$; e diciamolo k, cioè poniamo $k = \tau^{\mathrm{N}} a$.

La classe k è una classe di punti compresi fra a e d, effettivamente esistente. Dunque, pel postulato della continuità, esisterà un punto x appartenente al segmento ad, o coincidente con d, tale che fra x e d non giacciono punti della classe k, ma tale che preso un punto qualunque y fra a ed x, esistono punti della classe k compresi fra y ed x, o coincidenti con x.

Poichè colla trasformazione τ la retta ab non varia, e x appartiene a questa retta, anche $\tau^{-1} x$ vi apparterrà; perciò $\tau^{-1} x$ o coincide con x, o si trova sul raggio (x, a), o sul suo complemento $a'x$.

Ma se $\tau^{-1} x$ coincide con x, ossia $x = \tau x$, la trasformazione τ che

lascia inalterato il punto x, il raggio (x, a), e il semipiano (xa, c), è l'identità, il che è assurdo perchè la trasformazione τ fa corrispondere al punto a il punto diverso b.

Se $\tau^{-1}x$ appartiene al raggio (x, a), esisterà qualche punto della classe k compreso fra $\tau^{-1}x$ e x, o coincidente con x; cioè esisterà un intero n tale che $\tau^n a \,\varepsilon\, (\tau^{-1} x) x$; eseguendo l'operazione τ, sarà $\tau^{n+1}a \,\varepsilon\, x(\tau x)$; ora x è compreso fra $\tau^{-1} x$ e τx; $\tau^{-1}x$ è compreso fra a ed x; dunque τx sarà sul prolungamento $a'x$; e $\tau^{n+1}a$ che è compreso fra x e τx, sarà pure sul prolungamento $a'x$, ossia sul segmento xd; vale a dire esistono punti $\tau^{n+1}a$ che stanno fra x e d, cosa assurda colla ipotesi fatta, che x sia tale che fra esso e d non giacciano punti della classe $k = \tau^N a$.

Se $\tau^{-1}x$ appartiene al raggio $a'x$, τx apparterrà al suo complemento $\mathrm{Sr}(x, a)$; quindi fra τx ed x esisteranno punti della classe k. Sia n un intero tale che $\tau^n a$ sia compreso fra τx ed x, cioè $\tau^n a \,\varepsilon\, (\tau x) x$; sarà $\tau^{n-1}a$ compreso fra x e $\tau^{-1}x$, quindi $\tau^{n-1}a$ appartiene al raggio $a'x$, ossia esistono punti della classe k compresi fra x e d, il che è in contraddizione coll'ipotesi fatta.

Dunque il supporre che qualunque si sia il numero n, il punto $\tau^n a$ giaccia sempre fra a e d conduce sempre ad un assurdo; ossia esiste un numero n tale che d giaccia fra a e $\tau^n a$.

Fra i valori di n che soddisfano a queste condizioni havvi il minimo; dettolo n, se d non è un punto della serie $\tau^N a$, esso punto giacerà fra $\tau^{n-1}a$ e $\tau^n a$.

Teorema 3. Essendo d un punto del raggio $a'b$, τd appartiene al raggio $a'd$.

La cosa è chiara se il punto d appartiene alla serie $\tau^N a$.

Se d non vi appartiene, si determini il numero n in guisa che d sia compreso fra $\tau^n a$ e $\tau^{n+1}a$:

$$d \,\varepsilon\, (\tau^n a)(\tau^{n+1}a).$$

Sarà

$$\tau d \,\varepsilon\, (\tau^{n+1}a)(\tau^{n+2}a). \qquad (\alpha)$$

Ora $\tau^{n+2}a$ appartiene al raggio $a'(\tau^{n+1}a)$; dunque

$$(\tau^{n+1}a)(\tau^{n+2}a) \supset a'(\tau^{n+1}a). \qquad (\beta)$$

Il punto d sta fra a e $\tau^{n+1}a$, dunque

$$a'(\tau^{n+1}a) \supset a'd. \qquad (\gamma)$$

Dalle (α) (β) (γ) si deduce la proposizione a dimostrarsi.

Ne risulta che se un moto di traslazione fa corrispondere al punto a un punto b, ad un punto d del raggio $a'b$ non può far corrispondere un punto interno al segmento ad.

TEOREMA 4. Essendo a, b, c tre punti non collineari, si dia al segmento ab prima la traslazione τ che porta a in b, poi lo si rovesci attorno alla perpendicolare by alla ab, contenuta nel piano abc. Allora il punto b verrà a coincidere con a; ossia ogni segmento si può rovesciare:

$$S_{by}\,\tau\, b = a\,.$$

Infatti, dicasi σ il moto considerato

$$\sigma = S_{by}\,\tau = \begin{pmatrix} b & \mathrm{Sr}\,(b\,,a) & \\ a & \mathrm{Sr}\,(a\,,b) & \mathrm{Sp}\,(ab\,,c) \end{pmatrix}$$

e sia $d = \sigma b$. Si vuol dimostrare che $d = a$.

Poichè b appartiene a $\mathrm{Sr}(a,b)$, alla quale corrisponde in τ la $\mathrm{Sr}(b,a)$, il punto $\sigma b = d$ apparterrà a $\mathrm{Sr}\,(b\,,a)$, vale a dire o giace sul segmento ba, o coincide con a, o giace sul prolungamento di ba.

Se $d \,\varepsilon\, ba$, sarà $\sigma^2 a = d$; $\sigma^2\, \mathrm{Sr}\,(a\,,b) = \sigma\, \mathrm{Sr}\,(b\,,a) = \mathrm{Sr}\,(\sigma b\,, \sigma a) = \mathrm{Sr}\,(d\,,b)$; $\sigma^2\, \mathrm{Sp}\,(ab\,,c) = \mathrm{Sp}\,(ab\,,c)$; dunque

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} d & \mathrm{Sr}\,(d\,,b) & \\ a & \mathrm{Sr}\,(a\,,b) & \mathrm{Sp}(ab\,,c) \end{pmatrix},$$

ossia σ^2 è una traslazione. Essendo $d \,\varepsilon\, ba$, sarà $\sigma d \,\varepsilon\, (\sigma b)(\sigma a)$, cioè $\sigma a \,\varepsilon\, db$.

Noi abbiamo così una traslazione σ^2 che al punto a fa corrispondere $\sigma^2 a = d$, che sta fra a e b, e al punto b fa corrispondere $\sigma^2 b = \sigma d$, che sta fra d e b, il che è assurdo. Dunque il punto d non può giacere fra a e b.

Analogamente si prova che d non può appartenere al prolungamento di ba. Dunque il punto d coincide con a.

Se nell'espressione di σ^2 si legge a al posto di d, si ha $\sigma^2 = \omega$.

Si può scrivere

$$\sigma = \left(\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\,,\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\,, \mathrm{Sp}\,(ab\,,c)\right).$$

TEOREMA 5. Il moto $\sigma = S_{by}\,\tau$ è la simmetria attorno ad un certo asse xz contenuto nel piano abc, e perpendicolare alla retta ab.

Infatti si consideri il moto

$$S_{ab}\,\sigma = \begin{pmatrix} b & , & a & , & \mathrm{Co\,Sp}\,(ab\,,c) \\ a & , & b & , & \mathrm{Sp}\,(ab\,,c) \end{pmatrix}.$$

Si ha $(S_{ab}\,\sigma)^2 = \omega$. Sia c un punto qualunque del piano abc, e sia $c_1 = (S_{ab}\,\sigma)\, c$.

Poichè a $\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)$ corrisponde il suo complemento, c_1 giacerà ri-

spetto alla retta ab da banda opposta a quella in cui giace c; dunque il segmento cc_1 incontra la retta ab in un punto x. Il punto x non varia col moto $S_{ab}\sigma$; invero questo moto conserva inalterata la retta ab; al segmento cc_1 fa corrispondere c_1c, cioè il segmento stesso; quindi anche il loro punto d'incontro è fisso:

$$S_{ab}\,\sigma\, x = x\,.$$

Moltiplico per S_{ab}, ed osservo che $(S_{ab})^2 = \omega$, e $S_{ab}\,x = x$, poichè S_{ab} lascia inalterati tutti i punti di ab; e trovo

$$\sigma\, x = x\,.$$

Dunque il moto σ lascia inalterato il punto x, trasforma il raggio xa nel suo complemento, e lascia fisso il $\mathrm{Sp}\,(xa\,,c)$, cioè

$$\sigma = \left(x\,, \frac{\mathrm{Co\,Sr}\,(x\,,a)}{\mathrm{Sr}\,(x\,,a)}\,, \mathrm{Sp}\,(xa\,,c)\right)$$

perciò σ è la simmetria attorno all'asse xz perpendicolare alla retta ab nel punto x, e contenuto nel piano abc:

$$\sigma = S_{xz}\,.$$

Teorema 6. Ogni moto di traslazione τ è il prodotto di due simmetrie assiali, i cui assi sono perpendicolari ad ab, e contenuti nel piano abc.

Invero, dall'ultima formula, sostituendo a σ il suo valore, si ha:

$$S_{by}\,\tau = S_{xz}\,,$$

e moltiplicando avanti per S_{by},

$$\tau = S_{by}\,S_{xz}\,,$$

che dimostra la proposizione enunciata.

Rotazioni.

Essendo a, b, c punti non collineari, pongasi

$$\sigma = \left(a\,, \frac{\mathrm{Sr}\,(a\,,c)}{\mathrm{Sr}\,(a\,,b)}\,, \frac{\mathrm{Co\,Sp}\,(ac\,,b)}{\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)}\right).$$

Il moto σ dicesi la rotazione attorno al punto a, nel piano abc, che trasporta il raggio $(a\,,b)$ sul raggio $(a\,,c)$.

Dicesi angolo compreso fra i raggi ab e ac, essendo a, b, c tre punti non complanari, la figura piana seguente:

$$\mathrm{Ang}\big(\mathrm{Sr}(a,b),\mathrm{Sr}(a,c)\big)=\mathrm{Sp}(ab,c)\frown\mathrm{Sp}(ab,c)=abc\,.\smile bc\smile a'bc$$

Si dimostrano, in modo analogo a quanto si è fatto per le traslazioni, le proposizioni seguenti:

Teorema 1. Se i raggi $\sigma \, \mathrm{Sr}\,(a\,,b)$, $\sigma^2 \, \mathrm{Sr}\,(a\,,b)$, ... $\sigma^m \, \mathrm{Sr}\,(a\,,b)$ appartengono tutti al semipiano $(ab\,,c)$, allora ognuno di essi è compreso nell'angolo formato dal raggio precedente col seguente.

Teorema 2. Essendo d un punto del semipiano $(ab\,,c)$, allora o il raggio $(a\,,d)$ è uno dei raggi $\sigma^N \, \mathrm{Sr}\,(a\,,b)$, ovvero è compreso nell'angolo formato da due di questi raggi successivi.

Teorema 3. Essendo d un punto del semipiano $(ab\,,c)$, esterno all'angolo di ab con ac, cioè se $d \, \varepsilon \, \mathrm{Ang}\,(\mathrm{Sr}\,(a\,,c)\,,\mathrm{Co}\,\mathrm{Sr}\,(a\,,b))$, il raggio $\sigma \, \mathrm{Sr}\,(a\,,d)$ non appartiene all'angolo dei raggi $(a\,,b)$ e $(a\,,d)$.

Teorema 4. Se sulla figura $(a\,,b\,,c)$ si fa prima la rotazione σ, poi la simmetria S_{ac}, il raggio ab verrà in ac, e il raggio ac in ab, sicchè l'angolo si può rovesciare.

Teorema 5. Il moto $S_{ac}\,\sigma$ ora considerato è la simmetria attorno ad un certo asse ax (bisettrice dell'angolo bac)

$$S_{ac}\,\sigma = S_{ax}\,.$$

Teorema 6. Ogni rotazione σ è il prodotto di due simmetrie assiali

$$\sigma = S_{ac}\,S_{ax}\,.$$

Si vede facilmente che con nuove combinazioni di questi moti si possono ottenere nuove proprietà; si ha così un vasto campo di studii e ricerche. Esaminando quanto precede dal solo punto didattico, dobbiamo confessare che questa trattazione non ha ancora assunto quella semplicità che è necessaria per essere introdotta negli elementi. Studii ulteriori possono semplificare le singole parti, con più opportune combinazioni di postulati.

Pur tuttavia nutro fiducia che alcune delle osservazioni fatte possano essere utili per la pubblicazione di trattati elementari; e sarò lieto del mio lavoro se esso contribuirà a rendere più esatte le definizioni e dimostrazioni di Geometria elementare, e ad analizzare meglio i concetti su cui basa questa scienza.

Giuseppe Battaglini

Cenno necrologico di Ernesto Pascal

Io non voglio qui scrivere una biografia completa di Giuseppe Battaglini, e nemmeno fare un'analisi dei suoi lavori di matematica (*). Io, che gli fui per tanti anni scolaro ed amico devoto ed affezionato, voglio solo qui sciogliere un debito del cuore, e dire quelle cose che mi si affollano alla mente, ancora tutta piena dei carissimi ricordi di lui.

Di Giuseppe Battaglini, a chi per poco lo conoscesse da vicino, appariva subito la nota più alta e più spiccata del carattere; amare la scienza e la scuola sopra ogni altra cosa.

Per la scuola non c'era sacrificio cui egli non si sottomettesse con un vigore che perfino negli ultimi anni non lo abbandonò mai e poteva dirsi giovanile.

Ed invero, pensando di lui non si può non pensare per prima cosa a lui come maestro.

Si sarebbe detto che egli non viveva che per la sua scuola e pei suoi giovani, e gli sarebbe parsa vana l'opera sua di scienziato se non fosse stata accompagnata dall'opera sua di maestro. La quale opera sua di maestro era tanto efficace che quell'amore e quell'entusiasmo per la scienza da cui egli era animato e che formava l'occupazione unica della sua mente, egli finiva col trasfonderlo nei giovani suoi.

Una grandissima parte dei giovani matematici che occupano ora dei posti distinti nell'insegnamento sono stati scolari suoi, e hanno da lui ricevuto le prime ispirazioni, i primi incoraggiamenti e i primi aiuti; quegli aiuti e quegli incoraggiamenti ai quali lo si trovava sempre disposto.

(*) Una bella necrologia con molti dati biografici è comparsa da pochi giorni nei Rendiconti di Palermo per cura del Prof. Torelli.

Egli amava circondarsi di una schiera di giovani e intrattenersi con loro di soggetti matematici; faceva loro conoscere nuovi lavori; li metteva al corrente delle quistioni più vitali della scienza, faceva loro in poche parole il quadro di una teoria; prendeva occasione da questa per proporre loro qualche problema e per incitarli ad occuparsene; faceva insomma tutto quello che si può fare per invogliare alle ricerche originali, e non dimenticando neanche di essere poi benignamente indulgente coi principianti, di cui mai sprezzava i primi passi.

Le quistioni di cui s'intratteneva egli coi giovani non erano mai quistioni elementari, ma riguardavano sempre i maggiori problemi della geometria e dell'analisi, chè anzi egli sdegnava di occuparsi di cosucce che avessero l'aria di esercizi di scuola, e tutto ciò che avesse aspetto di grande e di nuovo lo attraeva irresistibilmente.

L'entusiasmo per gli studi in lui fu sempre giovanile, e non trascurò mai fatica per intraprendere qualunque nuovo studio e per imparare qualunque ramo delle matematiche che gli sembrasse utile. Ed in questo fu mirabilmente aiutato da una grande elasticità d'ingegno per modo che potette applicarsi perfino ad insegnare le discipline più disparate; egli insegnò calcolo e geometria superiore, insegnò analisi superiore e meccanica razionale, geometria analitica e teoria delle macchine, insomma egli insegnò quasi tutte le parti delle matematiche pure e anche qualcuna delle applicate.

Egli che aveva tutto imparato da sè senza l'aiuto di alcun maestro, aveva quella dote così caratteristica degli uomini che si formano da sè, il non schivare nessun lavoro per quanto fosse pesante, ed io mi ricordo che perfino negli ultimi anni egli conservò l'abitudine di trascrivere tutta intera su di un foglio di carta la lezione che veniva a recitare nella scuola, e dettava lezioni tutti i giorni, e spesso anche più volte in un giorno.

Era laborioso al massimo grado e diligente, e avrebbe voluto che tutti, e massime i giovani, fossero stati come lui; ma questo non sempre gli accadeva di trovare, ed egli se ne rattristava amaramente, e non trascurava occasione per lamentarsene.

Egli diceva spesso di invidiare i giovani di adesso che possono aver tanti mezzi e tanti aiuti per studiare cose nuove, mentre a' suoi tempi egli non aveva potuto avere nessun aiuto e avea dovuto da sè procacciarsi faticosamente la sua carriera. Egli apparteneva ancora a quegli uomini che non si adattano per nessuna ragione al mondo, alle circostanze ed ai tempi, e tutto quello scetticismo invadente ora l'animo dei giovani, quello stato sempre più decadente delle nostre Università, coi loro frequenti tumulti, colla crescente indisciplinatezza, tutto questo assieme di cose lo esasperava al massimo grado, e chi

gli era intimo vedeva che non si trattava di una esasperazione passeggera, ma che egli ne soffriva davvero internamente; e le sue interminabili lamentazioni se erano qualche volta eccessive, rivelavano però sempre un'anima candida, che vuole il bene e il meglio ad ogni costo, e non sa adattarsi a vedere il mondo qual'è.

Il nostro povero Battaglini fu laborioso ed ebbe fama di esserlo; fece parte di innumerevoli Commissioni ed i lavori più faticosi erano sempre affidati a lui. Ed egli tutto disimpegnava con zelo, con modestia, e sopratutto con un'onestà senza pari.

Ho detto con modestia; ed è difficile infatti trovare chi più di lui schivò gli onori, cercò sempre di porsi da parte, non si pose mai in prima linea, e mai cercò di profittare per sè della sua condizione e dei vantaggi personali che questa gli avrebbe potuto arrecare; la sua vita fu spesa tutta per gli altri ed egli si privò per sè perfino delle più innocenti soddisfazioni.

Mi ricordo di una lettera che egli mi scrisse una volta quando io stavo a Göttingen.

Egli mi diceva modestamente di invidiare la mia fortuna nell'aver potuto andare così lontano a studiare cose nuove, e che si sarebbe egli, vecchio com'era, reputato molto felice se avesse potuto in un momento liberarsi di tutti i suoi impegni e di tutte le sue infermità, e venire anche lui ad inscriversi umilmente fra gli scolari di Göttingen; è difficile trovare una maggior modestia in un vecchio a sessantaquattro anni come lui, e che aveva percorsa già tutta una luminosa carriera scientifica.

Gli piacque piuttosto vivere lontano dai rumori del mondo e chiuso nelle sue geniali meditazioni e nei suoi studii, dei quali mai si mostrò sfiduciato o stanco, anche negli ultimi anni quando la mente non più gli rendeva quello stesso aiuto di una volta.

E degli uomini che vivono separati, lontani dalle brighe e dagli affari, egli aveva la nota sopra tutte caratteristica; egli, bisogna notar ancor questo per formarsi intero il concetto di tutti i lati della mente sua, in qualche cosa mostrava una grande semplicità; si figurava ostinatamente un mondo tutto diverso dal reale; un mondo nel quale tutti non fossero preoccupati che delle idee di giustizia e di onestà, un mondo senza inciampi per chi volesse percorrere la via del bene. Una volta egli, preoccupato delle sorti dell'insegnamento, e credendo di potervi porre riparo in qualche maniera, s'impegnò di formulare un progetto nel quale si modificava dalle fondamenta tutto l'ordinamento degli studi matematici nelle Università; lo presentò alla Facoltà di Napoli e volle che la Facoltà lo presentasse al ministro, ed era fermamente convinto che quel problema intorno cui da tanti anni si affaticavano

e si affaticano inutilmente ministri e Parlamenti, egli lo potesse risolvere con una deliberazione della Facoltà. Quel progetto fu respinto senza neanche prenderlo in esame, ed a lui parve cosa strana e non se ne sapeva spiegare il perchè; ad un'altro sarebbe parsa cosa naturalissima.

Un altro lato rimarchevole della sua mente fu la sua avversione a certi nuovi concetti di geometria a cui egli ne' suoi studii giovanili non si era abituato, p. es., l'introduzione dei concetti di spazii a più dimensioni; ed è rimarchevole questo lato, perchè, come ho già detto, il suo spirito conservò sino a tardi una freschezza e una vigoria giovanile, ed era anzi per natura aperto a tutto ciò che avesse aspetto di novità. Egli accettò tutte le idee nuove, se le appropriò, vi collaborò con ardore; una sola fu l'idea nuova cui non si volle mai adattare: e fu la convenienza dell'introduzione di spazii a più dimensioni. Ma la predilezione per una parte piuttosto che per un'altra delle matematiche non lo accecò mai però al punto da farlo diventare passionato, e da renderlo parziale nei frequenti giudizii che dovette pronunziare sul valore dei giovani matematici.

Egli aveva provato per tempo, e a sue spese, come pesava l'ingiustizia, e aveva imparato a tenersene lontano e a non farsi fuorviare da personali simpatie o da estranei interessi.

Aveva cominciato la sua carriera, circa quarant'anni fa, a Napoli, presentandosi ad un concorso pubblico per la cattedra di Geometria analitica all'Università, e si era visto, in questo concorso, posposto a chi valeva meno di lui. Quest'atto d'ingiustizia, che non sarà così facilmente dimenticato, gli rimase per tutta la vita così fortemente impresso nella mente, che ogni volta che si trovò poi a dover giudicare gli altri, gli parve sempre non leggero còmpito il suo, e ci si impegnò con l'animo più scrupoloso; e se qualcuno potette essere da lui qualche volta discorde nel giudizio, tutti però dovettero sempre ammirare in lui una lealtà a tutta prova, un amore disinteressato, fermo, sincero per la giustizia, indipendente da ogni pregiudizio di scuole e da ogni idea di regionalismo, da qualsiasi interesse insomma che non fosse un elevato interesse di studii e di scienza.

Nel movimento matematico italiano degli ultimi trent'anni, Giuseppe Battaglini rappresenta una parte senza dubbio assai importante, e la rappresenta sia come maestro e ispiratore di una schiera numerosissima di giovani matematici, sia come scienziato, indagatore paziente e ricercatore laborioso e geniale.

Sono quasi un centinaio le pubblicazioni accademiche che portano il suo nome, e sono sparse massimamente nei Rendiconti dell'Accademia di Napoli, dell'Accademia dei Lincei e nei volumi del Giornale

di Matematiche di Napoli, di cui fu uno dei fondatori, e dopo pochi anni ne divenne poi il direttore.

Le sue prime memorie sono del 1851, e sono stampate negli Annali di Tortolini; riguardano i problemi sui poligoni iscritti ad una conica; il maggior numero delle sue pubblicazioni è fra gli anni dal 1862 al 1876, che furono gli anni più fecondi della sua carriera scientifica. Quando egli si poneva a studiare un argomento, non lo abbandonava finchè non lo avesse considerato da tutti i lati, ed è perciò che le sue Memorie sono in gran parte legate fra loro, e molte di esse congiunte insieme formano un tutto organico, sviluppano ampiamente tutta una teoria.

Vi sono una quindicina di Memorie dal 1864 sino al 1868, che si seguono l'una all'altra senza interruzione e che trattano della teoria delle forme algebriche e della interpretazione geometrica di tutte le forme invariantive di queste; si comincia colle forme binarie di 1° e 2° grado e si giunge sino alle forme ternarie di grado qualunque.

Degli stessi anni sono le sue Memorie sui sistemi di rette. In una di queste egli iniziò lo studio di quello speciale complesso di 2° grado che poi ha preso nome da lui, e la cui equazione si esprime mediante la somma dei quadrati delle coordinate. Egli aveva creduto, mediante un computo di costanti, che a tal forma potesse ridursi un qualunque complesso quadratico, ma il Klein poi in una Memoria celebre stampata nel 2° volume dei Mathematische Annalen mostrò la erroneità di questa opinione. Su questo complesso il Battaglini tornò poi molti anni dopo in una nota stampata nei Lincei (1878). Posteriori a queste e tutte del medesimo anno 1869 sono otto Memorie di Meccanica razionale, in cui si propose di ricostruire, dal punto di vista della nuova geometria Plückeriana, di cui egli fu uno dei più appassionati cultori, tutte le formole di statica, cinematica e dinamica.

In tre Memorie di Geometria Proiettiva (dal 1873 al 1875) egli si propose di ricavare le proprietà proiettive delle figure servendosi del concetto delle reti geometriche di Möbius; e così sarebbe poi lunga, ed io non mi son qui proposto di farla, l'analisi di tutti gli altri numerosi suoi lavori che trattano della partizione dei numeri, dei determinanti, di proprietà di curve e superficie speciali, di geometria immaginaria, della dipendenza conica fra due figure, delle forme bilineari, dei connessi, dell'equazione differenziale ellittica, ecc., ecc.

Negli ultimi anni si pose a studiare la teoria dei reciprocanti di Sylvester, e pubblicò all'Accademia dei Lincei una Nota in cui si proponeva di applicare quella teoria alla ricerca dei cosidetti punti sestatici di una curva, ricerca già fatta per altra via dal Cayley.

Si era poi anche impegnato a scrivere un trattato di geometria ana-

litica e lo aveva ideato su di un piano nuovo, con indirizzo diverso dal comune; ci si era appassionato e ne parlava molto spesso, e aveva già cominciato a scriverne parecchi fogli. Ma le forze già gli venivan meno, ed egli, vista l'impossibilità di continuare tutto il [illegible] si decise alla fine di pubblicare nel suo giornale quel poco [illegible] aveva già scritto.

Con lui l'Università di Napoli ha perduto una delle sue glorie maggiori; egli era stato in quell'Università il vero novatore della matematica, portando nella scuola un alito fecondo di vita nuova, portando in mezzo ai giovani quell'entusiasmo per la matematica nuova, quell'amore e quella sete di novità da cui egli era così fortemente dominato, quell'interessamento vivo per tutti i più alti e più vitali problemi della geometria e dell'analisi moderna.

Ed io fo voti che non tardi a sorgere in quella Università un qualunque monumento che ricordi ai posteri

la cara e buona immagine paterna

di Giuseppe Battaglini, perchè è giusto che nella scuola restino perennemente scolpite nel marmo le care sembianze di chi per la scuola spese efficacemente tutta la vita sua.

Pavia, maggio 1894.

Sugli insiemi continui e sugli insiemi connessi.

Nota di EUGENIO MACCAFERRI *a Bologna.*

1. Ricorderemo anzitutto che secondo la terminologia stabilita dal CANT . un insieme (finito) γ, ad un numero qualunque di dimensioni, si dice *continuo* se esso è

1°) *perfetto*, cioè identico al suo derivato γ', e

2°) *ben concatenato*, cioè siffatto che preso un numero positivo ε piccolo a piacere, per due punti A, A' di γ esiste un numero (finito) ν di punti A_1, A_2,... A_ν di γ tali che le distanze (*) AA_1, A_1A_2,... $A_\nu A'$ risultino tutte $< \varepsilon$ (**).

Alla condizione che l'insieme γ sia perfetto si può sostituire quella che sia *chiuso*, cioè che contenga ogni suo punto limite, giacchè manifestamente un insieme chiuso e ben concatenato è anche perfetto.

Per gli insiemi ad una dimensione rappresentati dai punti di una retta (*insiemi lineari*) è chiaro che l'insieme formato da tutti i punti di un intervallo o segmento di retta, estremi compresi, è un insieme lineare continuo. — Inversamente, è facile vedere che ogni insieme lineare continuo γ è formato da tutti i punti di un intervallo o segmento di retta, estremi compresi. Infatti, tale insieme γ ammetterà per limiti inferiore e superiore due punti A e B che appartengono a γ' e quindi a γ; di più ogni altro punto C compreso tra A e B apparterrà pure a γ, giacchè in caso contrario non apparterrebbe neppure a γ', epperò esisterebbe un intervallo di lunghezza finita λ racchiudente C e che non

---

(*) È noto che in uno spazio ad n dimensioni $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ la distanza di due punti $A(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $B(b_1, b_2, \ldots b_n)$ è definita dal valore positivo di $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$. A questa espressione il JORDAN (*Cours d'Analyse*, t. I, 2ᵉ éd.) sostituisce l'altra $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|$ che è infinitesima dello stesso ordine della precedente quando B tende ad A, e la chiama *écart*.

(**) G. CANTOR, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, Acta mathem., vol. 2°, pag. 406.

conterrebbe alcun punto di γ, ciò che è escluso per essere γ ben concatenato (*).

2. Dimostro ora che

« Se si hanno $n\,[n \geqq 2]$ funzioni (reali e ad un valore) continue

$$x_1 = x_1(t), \; x_2 = x_2(t), \dots \; x_n = x_n(t)$$

« di un parametro (reale) t che varia tra due valori assegnati t_0 e T « $[t_0 \leqq t \leqq T]$, escluso il caso che esse siano tutte per l'intero inter« vallo $t_0\,T$ delle costanti, — nello spazio ad n dimensioni $(x_1, x_2, \dots x_n)$ « l'insieme dei punti $(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))$ è un insieme continuo, « secondo la definizione del CANTOR (**). »

Suppongo per semplicità $n = 2$, ma il procedimento che seguo vale per n qualunque.

Essendo adunque x, y le coordinate cartesiane ortogonali dei punti di un piano, si consideri l'insieme γ dei punti rappresentati dalle due funzioni continue $x = x(t)$, $y = y(t)$, ove t è un parametro che varia tra due valori assegnati t_0 e T.

L'insieme γ è chiuso. Invero, sia P un punto limite dell'insieme γ. Preso un numero positivo arbitrario ρ, considero la successione infinita di cerchi concentrici, di centro P e di raggi

$$\rho, \; \frac{\rho}{2}, \; \frac{\rho}{2^2}, \dots \; \frac{\rho}{2^n}, \dots .$$

Tali cerchi contengono tutti dei punti di γ: come limiti superiori dei parametri t dei punti di γ interni a tali cerchi avremo una successione infinita di valori

$$\tau_0, \; \tau_1, \; \tau_2, \dots \; \tau_n, \dots$$

decrescenti, o almeno non crescenti. Sia τ il limite della successione (τ_n): per la continuità delle funzioni $x(t)$, $y(t)$ il punto $x(\tau)$, $y(\tau)$ di γ non può essere che il punto P.

L'insieme γ è ben concatenato. Invero, per la continuità uniforme delle $x(t)$, $y(t)$ nell'intervallo (reale) $t_0\,T$, preso un ε piccolo a piacere,

---

(*) JORDAN, loc. cit., pag. 27.

(**) L'insieme γ dei punti $(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))$, definito sopra, si dice che costituisce una *linea continua* nello spazio ad n dimensioni $(x_1, x_2, \dots x_n)$, sicchè il teorema si può enunciare brevemente dicendo che « in uno spazio ad n dimensioni una linea continua costituisce un insieme continuo ».

potremo dividere tale intervallo in un numero finito d'intervalli $t_0 t_1$, $t_1 t_2$,... t_νT in ognuno dei quali (estremi compresi) sia

$$| x(t) - x(t') | < \varepsilon , \quad | y(t) - y(t') | < \varepsilon ;$$

sicchè se si considerano i punti A_0, A_1, A_2,... A_ν, A' di γ che corrispondono ai valori t_0, t_1, t_2,... t_ν, T di t, avremo che le distanze A_0A_1, A_1A_2, ... $A_\nu A'$ sono tutte $< \varepsilon \sqrt{2}$, onde l'insieme è ben concatenato.

Segue che l'insieme γ è continuo come volevo dimostrare (*).

3. Pongo la seguente definizione:

« Si dirà che un insieme (finito) γ ad n dimensioni $(x_1, x_3, \ldots x_n)$ « è *connesso*, se essendo $A(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $B(b_1, b_1, \ldots b_n)$ due punti « qualunque di γ, si possono formare n funzioni (reali e ad un valore) « continue

$$(\alpha) \qquad x_1 = x_1(t), \; x_2 = x_2(t), \ldots x_n = x_n(t),$$

« tali che mentre t (reale) varia da t_0 a T $[t_0 \leqq t \leqq T]$, il punto « $M(x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$ varî da A a B appartenendo sempre a γ (**). »

Osserviamo che senza fare alcuna restrizione alla definizione posta, possiamo supporre che le funzioni (α) siano tali che il punto A non corrisponda che al solo valore iniziale t_0 di t, e parimenti il punto B non corrisponda che al solo valore finale T di t (***).

Supponiamo infatti che i punti $A(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots x_n(t_0))$, $B(x_1(T), x_2(T), \ldots x_n(T))$ corrispondano a più valori di t: è chiaro che i valori di t che dànno il punto A e quelli che dànno il punto B costituiscono (per la continuità delle (α)) due insiemi chiusi, e quindi potremo considerare il massimo t'_0 del primo insieme e il minimo T' del secondo insieme. E manifestamente le n funzioni continue date (α) per t variabile da t'_0 a T' $[t'_0 \leqq t \leqq T']$ sono tali che per ogni valore di t si

(*) Quando già il presente articolo era in bozze mi sono accorto che il teorema di questo § 2 è compreso nel teorema che si trova nel Jordan, loc. cit., a pag. 51. A sua volta il teorema del Jordan corrisponde nella sua prima parte al teor. III, pag. 66, vol. 2° delle *Lezioni di analisi infinitesimale* (1893) del prof. G. Peano.

(**) Cioè, quando $n \geqq 2$, se si può condurre tra A e B una *linea continua* i cui punti appartengano tutti a γ.

(***) Cioè, quando $n \geqq 2$, possiamo supporre che la linea continua che unisce A e B non abbia per *punti multipli* i due punti A e B.

ha un punto dell'insieme γ e che i punti A e B corrispondono ai soli valori t'_0 e T' (*).

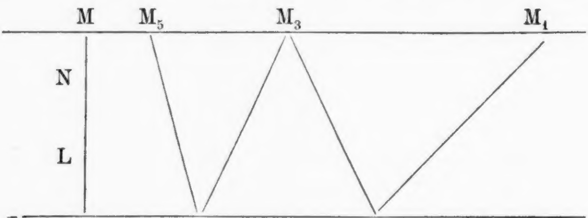
4. È manifesto che un insieme connesso, secondo la definizione data, è sempre ben concatenato, ma non si può asserire che, viceversa, ogni insieme ben concatenato sia connesso.

Ora è interessante vedere se esiste o no una relazione tra il concetto di *insieme continuo* secondo il Cantor e quello di *insieme connesso* definito a § 3.

In primo luogo il concetto di connesso non contiene quello di continuo, giacchè l'insieme dei punti di un segmento esclusi i punti estremi, l'insieme dei punti di un'area esclusi i punti del contorno, ecc... sono manifestamente insieme connessi, ma non sono continui. Tuttavia si può asserire che « un insieme connesso e chiuso è sempre un insieme continuo ».

Un insieme lineare continuo essendo formato da tutti i punti di un segmento di retta (§ 1) è manifestamente un insieme connesso, — avendosi in tal caso per le funzioni (α) di § 3 la $x_1 = t$. Ma in generale per gli insiemi a più dimensioni il concetto di continuo non contiene quello di connesso, *come l'intuizione potrebbe far credere*, ciò che è mostrato dal seguente esempio di un insieme continuo che non è connesso, secondo la definizione data a § 3.

Si considerino due rette parallele qualsivoglia e sia M M' un segmento perpendicolare ad entrambe e che le incontri nei suoi due estremi M, M'.



(*) Essendo data una linea continua λ tra due punti A e B avente un *numero finito* di punti multipli, è chiaro che, procedendo in modo analogo a quello sopra, si può sempre formare con punti della λ una nuova linea continua tra A e B non avente alcun punto multiplo. Sarebbe interessante vedere se, essendo data una qualsivoglia linea continua tra A e B avente *infiniti* punti multipli, è possibile o no in qualche modo formare con punti di essa una linea continua tra A e B priva di punti multipli. Non credo che la questione sia stata risoluta, nè sia facile risolversi.

Su le due parallele prendiamo a partire da M, M' due successioni di segmenti

$$MM_1,\quad MM_3,\quad MM_5,\dots\quad MM_{2n-1},\dots$$
$$M'M_2,\quad M'M_4,\quad M'M_6,\dots\quad M'M_{2n},\dots$$

misurati rispettivamente dalle due successioni di numeri

$$1,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{5},\dots\quad \frac{1}{2n-1},\dots$$
$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{6},\dots\quad \frac{1}{2n},\dots$$

E consideriamo nel piano l'insieme γ di punti formato dal segmento MM' e dalla successione di segmenti

$$M_1M_2,\quad M_2M_3,\quad M_4M_5,\quad M_{2n-1}M_{2n},\dots$$

Manifestamente tale insieme è chiuso e ben concatenato, cioè è continuo. Dico che esso non è connesso, secondo la definizione di § 3.

Infatti si prenda un punto arbitrario N sul segmento MM'. Se l'insieme γ è connesso, come supponiamo per un momento, esisteranno due funzioni (reali e ad un valore) continue $x = x(t)$, $y = y(t)$ per t variabile in un intervallo $t_0\,T$ (estremi compresi), siffatte che mentre t varia da t_0 a T $[t_0 \leqq t \leqq T]$, il punto $P(x(t),\ y(t))$ appartenendo sempre a γ varia da $M_1(x(t_0),\ y(t_0))$ ad $N(x(T),\ y(T))$. Di più si può supporre, per ciò che abbiamo detto al § precedente, che i punti M_1 ed N corrispondano ai soli valori t_0 e T di t.

Supponiamo dunque che esistano tali funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$. L'insieme g rappresentato da esse dovendo essere un insieme continuo (§ 2) sarà formato: 1°) da tutti i segmenti $M_\nu M_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, 3,\dots)$, giacchè se non contenesse tutti i punti di uno di questi segmenti, l'insieme g o non sarebbe chiuso o non sarebbe ben concatenato; e 2°) dal segmento MM' i cui punti sono punti limiti dei punti dei segmenti $M_\nu M_{\nu+2}$ $(\nu = 1,\ 2,\ 3,\dots)$. Dunque se esistono le funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, l'insieme g rappresentato da esse coincide coll'insieme dato γ.

Ora nella spezzata indefinita $M_1M_2M_3\dots M_\nu M_{\nu+1}\dots$ se si considera il senso $M_1M_2M_3$ si ha che di due punti H, K di essa uno precede l'altro. Sia K il punto che viene dopo. Sia t'' *uno* dei parametri di K; dico che H avrà certamente un parametro $t' < t''$. Invero se si considera l'insieme g rappresentato dalle $x = x(t)$, $y = y(t)$ per t compreso tra t_0 e t'' $[t_0 \leqq t \leqq t'']$, questo insieme essendo continuo (§ 2) dovrà comprendere tutta la porzione di spezzata compresa tra il punto M_1 e il

punto K, e perciò dovrà contenere anche il punto H, il quale corrisponderà quindi necessariamente ad un parametro $t' < t''$.

Ciò posto si consideri un punto L del segmento MM' diverso da N: sia $\bar{t}$ il suo parametro massimo; avremo $\bar{t} < T$, l'eguaglianza esclusa giacchè le $x = x(t)$, $y = y(t)$ sono ad un valore. Se si dimostra che ciò è assurdo, se ne concluderà che non esistono le $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Si conducano per i punti L, N due parallele alle due rette parallele da cui siamo partiti, e si considerino le due successioni di punti

$$\text{(1)} \qquad L_1, L_2, L_3, \ldots L_\nu, \ldots,$$

$$\text{(2)} \qquad N_1, N_2, N_3, \ldots N_\nu, \ldots,$$

in cui le parallele condotte per L, N incontrano i segmenti

$$M_1 M_2, \; M_2 M_3, \; M_3 M_4, \ldots M_\nu M_{\nu+1}, \ldots;$$

tali due successioni (1), (2) hanno rispettivamente per punti limiti L, N. Ora consideriamo le due successioni formate l'una coi parametri massimi dei punti della (1), l'altra coi parametri minimi dei punti della (2)

$$\text{(1')} \qquad t_1, t_2, t_3, \ldots t_\nu, \ldots,$$

$$\text{(2')} \qquad T_1, T_2, T_3, \ldots T \; , \ldots;$$

È facile vedere che queste due successioni risultano entrambe crescenti ed hanno per limiti la (1') il parametro massimo $\bar{t}$ di L e la (2') il parametro T di N (*). Ma le (1'), (2') non possono avere limiti differenti, giacchè se fosse $\bar{t} < T$, cioè $\bar{t} = T - \lambda$ ove λ è un numero positivo, si dedurrebbe che in un determinato segmento $M_\nu M_{\nu+1}$ c'è un punto N_ν di parametro minimo $T_\nu > T - \frac{\lambda}{2}$, e quindi nei segmenti successivi $M_{\nu+1} M_{\nu+2}$, $M_{\nu+2} M_{\nu+3}$, ... non vi potrebbero essere dei punti aventi parametri $< T - \frac{\lambda}{2}$, ciò che è necessario affinchè la successione (1') abbia per limite $\bar{t} = T - \lambda < T - \frac{\lambda}{2}$.

(*) Invero, essendo le funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ continue, le due successioni

$$x(t_1), \; x(t_2), \; x(t_3), \; \ldots \; x(t_\nu), \; \ldots$$
$$y(t_1), \; y(t_2), \; y(t_3), \; \ldots \; y(t_\nu), \; \ldots$$

avranno per limiti rispettivamente $x(\bar{t})$, $y(\bar{t})$; e così le $x(T_\nu)$, $y(T_\nu)$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) avranno per limiti le $x(T)$, $y(T)$.

Risulta dunque escluso che esistano le due funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ la cui esistenza è necessaria affinchè l'insieme γ considerato sia connesso, secondo la definizione data a § 3 (*).

Concludo che i due concetti di insieme continuo e di insieme connesso oltre ad essere differenti, non hanno tra loro alcuna relazione, cioè nessuno di essi è contenuto nell'altro.

È pure manifesto che non vi è alcuna relazione tra il concetto di connesso e quello di *semi-continuo* — insieme non chiuso, ma ben concatenato e tale che due suoi punti possono essere riuniti da un continuo (**). —

Noterò infine che si presenta la questione se non fosse forse conveniente sostituire alla definizione analitica di insieme connesso data a § 3, un'altra definizione meno restrittiva, per la quale si potesse concludere che ogni insieme continuo è anche connesso. Ma in tale questione non intendo di entrare ora, contentandomi d'averla indicata all'attenzione degli studiosi.

Bologna, maggio 1894.

EUGENIO MACCAFERRI.

(*) Come gentilmente mi suggerisce il prof. PEANO all'esempio citato di un insieme continuo non connesso si può aggiungere quest'altro: L'insieme formato dalla curva rappresentata dall'equazione

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

per x tale che $0 < |x| \leqq M$, ove M è un numero positivo, e dal segmento dell'asse y compreso tra i punti di ordinate 1 e -1.

(**) CANTOR, loc. cit., pag. 407.

Lettera di E. Catalan.

Il 14 febbraio scorso moriva in Liegi, nella veneranda età di 80 anni, uno dei più illustri matematici, Eugenio Catalan, professore emerito dell'Università di Liegi, seguendo nella tomba, a brevi giorni d'intervallo, la compagna della sua vita.

Non è nostra intenzione di esaminare la lunga ed importante serie dei lavori pubblicati dal Catalan; i quali innalzarono il suo nome a sì alta fama, schiudendogli le porte delle principali Accademie e Società scientifiche, quali quelle del Belgio, di Tolosa, di Lilla, di Pietroburgo, di Torino, dei Lincei in Roma, di Amsterdam, ecc.

La sua vita fu tutta dedicata al lavoro. Ancora in gennaio di questo anno ci scriveva per indicare alcune correzioni ed aggiunte al Formulario di Matematica, le quali saranno pubblicate a suo tempo.

Per commemorare in qualche modo un tant'uomo, pubblichiamo qui una sua lettera, la quale può interessare i lettori.

(P).

Monsieur,

Je crois être d'accord avec vous sur ce premier point: bien que les mots *droite, plan, cercle,* etc. aient un sens clair, même pour les enfants, on doit, dans tout ouvrage didactique, les définir (si l'on peut). Il y a exception pour la droite. Tout le monde en a l'idée; et les définitions essayées n'y ajoutent rien. Mais voici où commence le désaccord. Vous pensez, comme M. Tannery, que cette définition: *une fraction est l'ensemble de deux nombres,* est plus satisfaisante que celle-ci: *une fraction est l'ensemble de parties égales de l'unité.* Je pense le contraire.

Revenant au premier point, j'ai si bien compris, il y a *cinquante ans* (au moins), la nécessité de *définir,* que, dans mes *Éléments de Géométrie,* (1843) j'ai défini les mots: *longueur, aire, volume, rapport de deux grandeurs incommensurables,* etc.; et que, dans mon petit *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre,* dont la 11ième édition vient de paraître, j'ai défini (et non démontré) les égalités $a \times -b = -ab$, $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$, etc.

J'ai cru devoir, également, changer la définition habituelle de $\sqrt{2}$, définition qui implique un cercle vicieux.

Ces idées, combattues d'abord, ont été adoptées depuis; à ce point qu'on s'est avisé, un beau jour, de les attribuer à M. M. Dedekind, Cantor, etc. Vous pouvez, relativement à cette question, consulter le beau discours de M. Mansion, placé en tête de mes *Mélanges Mathématiques*.

Si vous pensez, Monsieur, que mes lettres puissent intéresser quelque lecteur de la *Rivista*, je vous en abandonne, bien volentier, la propriété.

Encore un mot. Dans la première page de votre intéressante ed instructive missive, vous dites: « le concept de nombre entier positif ». Croyez-vous qu'il y ait des nombres négatifs? Pour moi, je ne le crois pas. Un nombre étant le rapport des deux grandeurs (sous entendu de *même espèce*) est essentiellement positif. On doit dire: quantité négative, et non nombre *négatif*. De même, à ce qu'il me semble, *les imaginaires ne sont pas des quantités; car une imaginaire n'est, ni plus grande, ni plus petite qu'une autre.*

Je sais bien que mon opinion n'est guère partagée, même par d'illustres Géomètres; mais je suis un peu têtu.

Je voudrais, Monsieur, *comprendre* l'italien comme vous *écrivez* le français. Malheureusement ainsi que le disait Mansion, je suis un autodidacte; c'est-à-dire un *volontaire* de la science et de la littérature; le peu que je sais je l'ai appris, pour ainsi dire, dans les rues de Paris.

Perdonnez-moi cette longue lettre, fort décousue, et ayez-moi

votre dévoué vieux collègue
E. Catalan.

Liège, 5 février 1892.

Catalogue of the University of Texas for 1893-4.

Questo Annuario di una delle più giovani e fiorenti Università degli Stati Uniti contiene informazioni non prive d'interesse per chi, dall'esame dell'organizzazione degli studi superiori in quei paesi che sotto tanti rapporti ci precedono nella via della civiltà, volesse trarre oroscopi sull'avvenire dei nostri ordinamenti universitari. Ecco alcuni particolari che mi sembrano degni d'attenzione a questo riguardo.

Per ciò che riflette la scelta dei corsi che lo studente deve frequentare in ciascun anno, è in vigore il cosìdetto *Course System*, che consiste in ciò: i corsi sono classificati secondo la loro importanza e divisi in corsi completi (*full courses*) e corsi equivalenti a due terzi o ad un terzo di corso completo (*two third courses, one third courses*): questi ultimi durano solo rispettivamente due o uno dei tre trimestri in cui è diviso l'anno scolastico (che va dal 29 settembre al 20 giugno).

Per ottenere ciascuna delle lauree alle quali gli studenti possono aspirare non occorre altro che aver frequentato regolarmente venti corsi completi o un numero equivalente tra corsi completi e corsi parziali. Così per esempio, per ottenere il grado di *Bachelor of Science*, che corrisponde alla nostra Laurea in Scienze matematiche e fisiche, lo studente deve aver frequentato:

a) Dieci corsi completi (o un numero equivalente di corsi parziali) riferentisi a qualche ramo della matematica, della fisica o delle scienze naturali.

b) Due corsi completi di lingue moderne.

c) Un corso completo di Storia o di Filosofia.

d) Altri quattro corsi su qualsiasi soggetto.

Di questi 20 corsi, solo 4 $^1/_3$ sono indicati come indispensabili (*prescribed*) per ottenere la laurea; quanto alla scelta degli altri e all'ordine in cui essi possono esser seguiti o distribuiti nei varî anni di studio è

lasciata piena libertà agli interessati. Spetta poi in particolare a ciascun professore d'indicare, ai giovani che intendono seguire le sue lezioni, quali sono i corsi a cui egli suppone che essi abbiano già assistito. Naturalmente si raccomanda agli studenti di procedere con cautela e dietro il consiglio dei loro professori *(with care and under advice)* alla composizione del gruppo di corsi che intendono seguire in ciascun anno. Tale gruppo non può constare di più di sei corsi completi (o d'un numero equivalente di corsi parziali) nè di meno di quattro.

L'insieme dei corsi che corrisponderebbe alla nostra facoltà di matematica viene a esser diviso in tre Sezioni o *Schools*, cioè: *School of pure mathematics* diretta dal professor Halsted, *School of Physics* diretta dal professor Macfarlane e *School of applied mathematics* (corrispondente alla nostra Scuola d'applicazione per gli Ingegneri) diretta dal professor Taylor.

Quanto alle materie che formano oggetto d'insegnamento nei corsi delle *Schools of mathematics*, due tratti caratteristici mi sembrano degni di esser segnalati:

1. Il largo posto che vi si fa a quelle parti della matematica che sono destinate a servire di strumento e di sussidio nelle ricerche di fisica e di meccanica [1].

Così, per esempio, vi è un corso speciale sui *Quaternioni* ($^2/_3$), uno (del Macfarlane $^3/_3$) sul *Calcolo geometrico (Space analysis)*: altri corsi sono dedicati all'esposizione delle opere classiche nei varî rami della Fisica matematica (la *Meccanica analitica* di Lagrange, la *Théorie de la Chaleur* di Fourier, *Electricity and Magnetism* di Clerk Maxwell).

2. Il maggior riconoscimento dell'efficacia degli studi matematici come disciplina mentale atta ad affinare e rinvigorire la mente e come necessaria preparazione intellettuale per chi voglia dedicarsi a qualunque ramo di ricerca scientifica compresi anche quelli nei quali le cognizioni acquistate nei corsi di matematica non trovano alcuna applicazione diretta. Così è fatto obbligo anche agli aspiranti alle altre lauree oltre a quelle di Scienze (cioè al grado di *Bachelor of Literature* o di *Bachelor of Arts*) di seguire $^4/_3$ di corso nella *School of pure mathematics* e un corso completo ($^3/_3$) nella *School of Physics* [2].

---

[1] Prominence is given to the practical utility of mathematics and its power as *the* instrument of scientific research.

[2] In the school of pure Mathematics special attention is given to the mental discipline of the Student. The development of intellectual powers and the formation of correct habits of thinking and reasoning are made a paramount objcet.

E allo stesso concetto parmi si debba attribuire l'istituzione di un corso speciale di *Logica matematica* (*Algebras of Logic*) e di un altro di *Storia della Matematica* (1).

G. Vailati.

(1) Throughout the School very special attention is given to the historical development of the subject studied. Anche nelle altre Facoltà, per esempio quelle di Medicina, esistono cattedre destinate ed esporre la storia delle varie Scienze. Il professor J. M. Peirce, incaricato d'un corso sui *Quaternioni* e di un altro sulla *Logica matematica* nella *Harvard University* ha recentemente tradotto in inglese la *Storia della Meccanica* del Mach dell'Università di Praga (*Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, Leipzig, Brockhaus 1889) opera eccellente e che meriterebbe di esser conosciuta anche da noi. Il testo consigliato a quelli che seguono il corso di *Storia della matematica* è l'*History of mathematics* del Cajori.

Nuove pubblicazioni.

Lezioni sulla teoria delle funzioni, dettate nella R. Università di Bologna dal Prof. S. Pincherle, raccolte ed ordinate da Eugenio Maccaferri. — Parte I, Bologna 1893, litografata, pag. 301, L. 10.

E. Mosnat. — *Problèmes de Géométrie analytique.* — Tome troisième: *Géométrie a trois dimensions.* Paris, Nony, 1894, pag. 400 in-8°.

Francesco d'Arcais. — *Corso di Calcolo infinitesimale.* Vol. II: *Calcolo integrale.* Padova, Draghi, pag. XVI+693 - 1894, L. 11.

C. Burali-Forti. — *Logica matematica.* Manuali Hœpli, 1894, pag. VI+158, L. 1,50.

C. Jordan. — *Cours d'Analyse de l'École Polytéchnique.* Deuxième édition. - Tome deuxième: *Calcul intégral.* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894, pag. XVIII+627.

Gabriel Arnoux. — *Arythmétique graphique.* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894, pag. XXIII+175.

Sulle permutazioni relative ad una data.

Nota di GIACINTO MUSSO *a Genova.*

È noto che il numero delle permutazioni che si possono fare con n cose è dato dal prodotto

$$1 . 2 . 3 \dots n .$$

Io designerò coi numeri $1, 2, \dots n$, i posti rispettivi che queste n cose occupano in una qualunque di esse:

$$a, b, c, \dots r, s, t$$

e mi propongo di determinare il numero di tutte quelle sole in cui le n cose considerate occupano un nuovo posto, diverso da quello a loro assegnato nella permutazione data. Tali permutazioni le dirò *permutazioni relative alla data,* o più brevemente *permutazioni relative.*

Nel caso per es. di 3 cose a, b, c, se si conviene, scrivendo

$$a_1, b_2, c_3$$

di dover intendere che a occupa il 1° posto, b il 2° e c il 3°, fra le possibili permutazioni che io cerco di determinare, ve ne sarà certamente una in cui b occuperà il 1° posto, e poi un'altra in cui il 1° posto sarà occupato da c. Ma fissato b al 1° posto, al 2° non potremo porre che c, e a verrà ad occupare il 3°. Fissato invece al 1° posto c, il 2° non potrà essere occupato che da a, e conseguentemente il 3° da b. In questo caso otteniamo così 2 permutazioni relative.

Ragionando in modo analogo, si troverebbe che il numero delle permutazioni relative di 4 cose è 9; che quello di 5 è 44, ecc.; e in generale, se si rappresenta con Q_n il numero delle permutazioni relative di n cose, che [1]:

$$Q_n = (n-1)(Q_{n-1} + Q_{n-2}) .$$

---

(1) Questa formula è dovuta a Eulero. — v. Ed. Lucas, *Théorie des Nombres.* Paris, 1891, pag. 212.

Per la determinazione, però, di un tal numero, io mi propongo di seguire un'altra via, a dir vero indiretta; ma percorrendo la quale, oltre a giungere a dei risultati finali messi sotto una forma un po' differente, potremo vedere che esiste uno stretto legame fra il numero delle permutazioni relative di n cose, e quello dei termini dello sviluppo di un determinante di ordine n che non contengono a fattore nessun elemento principale.

Detti pertanto *elementi principali* di un determinante di ordine n gli n elementi che occupano la diagonale principale; e designato rispettivamente con S_n, S'_n, S''_n, S'''_n, ... $S^{(m)}_n$, il numero dei termini dello sviluppo del determinante, che contengono a fattore n, $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ... $(n-m)$, elementi principali, comincierò a questo scopo, a far vedere che si ha:

$$S_n = 1$$

$$S'_n = 0$$

$$S''_n = \Sigma\, n\, S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$S'''_n = \Sigma \left\{ n\, S'_{n-1} + n(n-1)\, S_{n-2} \right\} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

$$S^{\mathrm{IV}}_n = \Sigma \left\{ n\, S''_{n-1} + n(n-1)\, S'_{n-2} + n(n-1)(n-2)\, S_{n-3} \right\} = \frac{3}{2}\, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$S^{\mathrm{V}}_n = \Sigma \left\{ n\, S'''_{n-1} + n(n-1)\, S''_{n-2} + n(n-1)(n-2)\, S'_{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)\, S_{n-4} \right\} = \frac{11}{6}\, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5}$$

. . . .

e in generale:

$$S^{(m)}_n = \Sigma \left\{ n\, S^{(m-2)}_{n-1} + n(n-1)\, S^{(m-3)}_{n-2} + \dots + n(n-1)\dots(n-m+5)\, S''_{n-m+4} + n(n-1)\dots(n-m+4)\, S''_{n-m+3} + n(n-1)\dots(n-m+3)\, S'_{n-m+2} + n(n-1)\dots(n-m+2)\, S_{n-m+1} \right\}.$$

Che nello sviluppo di un determinante di ordine n non vi possa essere che un solo termine che contiene a fattore tutti gli elementi principali è evidente: comincierò quindi a far vedere che in esso sviluppo non vi può essere alcun termine che li contiene a fattore tutti meno uno.

Basta perciò osservare che si ottengono tutti i $n!$ termini dello sviluppo, permutando in tutti i modi possibili le n lettere, o gli n indici di uno qualunque di essi, per es.:

$$a_1\, b_2\, c_3 \dots r_{n-2}\, s_{n-1}\, t_n$$

e che la più semplice permutazione è quella di cambiare fra loro due indici o due lettere. Si vede allora che se il termine precedentemente scritto è composto di soli elementi principali, sarà impossibile ottenerne altri che contengono a fattore $(n-1)$ di tali elementi.

Dopo ciò sarebbe facile calcolare il numero dei termini dello sviluppo che contengono a fattore $(n-2)$ elementi principali, perchè nel termine

$$a_1 b_2 c_3 \ldots r_{n-2} s_{n-1} t_n$$

composto di soli elementi principali noi potremo permutare fra loro l'indice 1 cogli $(n-1)$ restanti e ottenere $(n-1)$ termini di quelli che si cercano; l'indice 2 cogli indici $3, 4, \ldots (n-1), n$, e ottenerne altri $(n-2)$; poi l'indice 3 cogli indici $4, 5, \ldots (n-1), n$, e ottenerne ancora $(n-3)$, ecc., finalmente l'indice $(n-1)$ coll'indice n, e ottenerne *un* solo. In totale:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2};$$

quanti cioè abbiamo annunciato doverne esistere.

Ma invece di procedere per questa via che in seguito non è più così semplice, cercherò di calcolare un tal numero per mezzo di considerazioni un po' diverse, le quali ci permettono di pervenire similmente a trovare il numero dei termini che nello sviluppo del determinante contengono a fattore $(n-3)$, $(n-4)$, ... $(n-m)$, elementi principali.

Essendo $n > r \geqq s$, definiremo con $\Delta_{r.s}$ un determinante di ordine r, facente parte dello sviluppo di uno di ordine n, e contenente fra i suoi r^2 elementi e nella sua diagonale principale *soltanto* s di quelli che nel determinante di ordine n summenzionato (e che per analogia dovremo indicare con $\Delta_{n,n}$) occupavano la diagonale analoga. Allora se adoperiamo le notazioni generiche e_P ed e_N per indicare rispettivamente gli elementi che *sono* e *non sono principali* nel determinante $\Delta_{n.n}$, quando si sviluppa quest'ultima secondo gli elementi di una qualunque delle sue linee, o una qualunque delle sue colonne, avremo evidentemente:

$$(a) \qquad \Delta_{n,n} = e_P \Delta_{n-1,n-1} + (n-1)\, e_N \Delta_{n-1,n-2},$$

e siccome si è indicato con S''_n il numero dei termini dello sviluppo che contengono a fattore $(n-2)$ elementi principali, è facile vedere che si avrà:

$$(I) \qquad S''_n = S''_{n-1} + (n-1);$$

perchè essendo e_P elemento principale, il 1° termine del 2° membro della (a) ci darà tanti termini dello sviluppo aventi a fattore ($n - 2$) elementi principali, quanti ne contiene nel suo sviluppo il determinante $\Delta_{n-1,n-1}$, aventi però a fattore soltanto ($n - 3$) elementi principali; ed essendo e_N elemento non principale, e $\Delta_{n-1,n-2}$ un determinante di ordine ($n - 1$) i cui elementi della sua diagonale principale sono tutti principali eccettuato uno, ad ogni prodotto $e_N \Delta_{n-1,n-2}$, noi non otteniamo che un solo termine avente a fattore ($n - 2$) elementi principali: quello cioè che proviene dal prodotto degli elementi della diagonale principale nel determinante $\Delta_{n-1,n-2}$.

Ma: $S_{n-2} = 1$, epperciò potremo ancora scrivere:

$$S''_n = S''_{n-1} + (n-1) S_{n-2};$$

ossia, cambiando n in $n + 1$:

$$S''_{n+1} = S''_n + n S_{n-1}.$$

Quest'ultima, integrata ci dà:

$$S''_n = \Sigma n S_{n-1} + C = \frac{n(n-1)}{2} + C;$$

e la costante essendo nulla, come si può scorgere dando ad n un valore particolare, avremo finalmente:

$$(1) \qquad S''_n = \Sigma n S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{c. d. d.}$$

Vedremo ora, che si può determinare con un ragionamento analogo il numero dei termini dello sviluppo del determinante, che contengono a fattore ($n - 3$) elementi principali.

Passiamo anzitutto a stabilire una relazione analoga alla (a). Supposto che il determinante Δ abbia nella sua diagonale principale un elemento non principale, sviluppandolo secondo gli elementi della linea o della colonna che concorrono nel medesimo si ha:

$$(b) \qquad \Delta_{n,n-1} = e_N \Delta_{n-1,n-1} + (n-1) e_N \Delta_{n-1,n-2}.$$

Dopo ciò, siccome avremo similmente:

$$\Delta_{n-1,n-2} = e_N \Delta_{n-2,n-2} + (n-2) e_N \Delta_{n-2,n-3}$$

la (a) diventerà per sostituzione:

$$(a') \quad \Delta_{n,n} = e_P \Delta_{n-1,n-1} + (n-1) e_N e_N \Delta_{n-2,n-2} + (n-1)(n-2) e_N e_N \Delta_{n-2,n-3}$$

e da quest'ultima, siccome abbiamo indicato con S'''_n il numero dei

termini dello sviluppo che contengono a fattore $(n-3)$ elementi principali, è facile ricavare la relazione:

$$\text{(II)} \qquad S'''_n = S'''_{n-1} + (n-1)(n-2)\,;$$

perchè basta osservare: anzitutto, che essendo e_P elemento principale, il 1° termine del 2° membro della (a') ci deve dare tanti termini dello sviluppo aventi a fattore $(n-3)$ elementi principali, quanti ne contiene nel suo sviluppo il determinante $\Delta_{n-1,n-1}$, aventi però a fattore $(n-4)$ elementi principali; poi, che essendosi dimostrato che un determinante di ordine n, non contiene nel suo sviluppo nessun termine avente a fattore $(n-1)$ elementi principali, il determinante $\Delta_{n-2,n-2}$ non ce ne fornisce nessuno; e finalmente che il determinante $\Delta_{n-2,n-3}$ non ce ne fornisce che uno solo: quello cioè proveniente dal prodotto degli elementi della diagonale principale.

Ma sappiamo che:

$$S'_{n-1} = 0\,;\; S_{n-3} = 1\,;$$

epperciò la (II) potremo scriverla anche così:

$$S'''_n = S'''_{n-1} + (n-1)\,S'_{n-2} + (n-1)(n-2)\,S_{n-3}$$

ossia, cambiando n in $n+1$:

$$S'''_{n+1} = S'''_n + n\,S'_{n-1} + n\,(n-1)\,S_{n-2}\,.$$

Quest'ultima, integrata ci dà:

$$S'''_n = \Sigma\,\{n\,S'_{n-1} + n\,(n-1)\,S_{n-2}\} + C = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3} + C$$

e la costante essendo nulla, avremo finalmente:

$$(2) \qquad S'''_n = \Sigma\,\{n\,S'_{n-1} + n\,(n-1)\,S_{n-2}\} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3}\,.$$

Come si sarà già potuto osservare, nello stesso modo che coll'aiuto della (b) noi abbiamo potuto, per via ricorrente, ridurre la (a) alla (a'), potremo ora trasformare la (a') in un'altra relazione che diremo (a''). Avremo cioè:

$$(a'') \qquad \Delta_{n,n} = e_P\,\Delta_{n-1,n-1} + (n-1)\,e_N e_N\,\Delta_{n-2,n-2} + (n-1)(n-2)\\ e_N e_N e_N\,\Delta_{n-3,n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)\,e_N e_N e_N\,\Delta_{n-3,n-4}\,,$$

dalla quale si deduce:

$$\text{(III)} \quad S^{IV}_n = S^{IV}_{n-1} + (n-1)\,\frac{(n-2)(n-3)}{2} + (n-1)(n-2)(n-3)$$

o anche:

$$S^{\mathrm{iv}}_n = S^{\mathrm{iv}}_{n-1} + (n-1)S''_{n-2} + (n-1)(n-2)S'_{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)S_{n-4}$$

Cambiando poi n in $n+1$:

$$S^{\mathrm{iv}}_{n+1} = S^{\mathrm{iv}}_n + n\,S''_{n-1} + n(n-1)\,S'_{n-2} + n(n-1)(n-2)\,S_{n-3}$$

e integrando:

$$(3) \qquad S^{\mathrm{iv}}_n = \Sigma \left\{ n\,S''_{n-1} + n(n-1)\,S'_{n-2} + n(n-1)(n-2)\,S_{n-3} \right\} = \frac{3}{2}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4};$$

la costante essendo nulla.

Continuando si avrebbe:

$$(\mathrm{IV}) \qquad S^{\mathrm{v}}_n = S^{\mathrm{v}}_{n-1} + (n-1)\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3} + (n-1)(n-2)\frac{(n-3)(n-4)}{2} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4);$$

o anche:

$$S^{\mathrm{v}}_{n+1} = S^{\mathrm{v}}_n + n\,S'''_{n-1} + n(n-1)\,S''_{n-2} + n(n-1)(n-2)\,S'_{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)\,S_{n-4}$$

e integrando:

$$(4) \qquad S^{\mathrm{v}}_n = \Sigma \left\{ n\,S'''_{n-1} + n(n-1)\,S''_{n-2} + n(n-1)(n-2)\,S'_{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)\,S_{n-4} \right\} = \frac{11}{6}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5};$$

ecc.; e in generale è facile vedere che sussisterà l'equazione alle differenze:

$$(\mathrm{R}) \qquad S^{(m)}_n = S^{(m)}_{n-1} + (n-1)S^{(m-2)}_{n-2} + (n-1)(n-2)S^{(m-3)}_{n-3} (n-1)(n-2)(n-3)\,S^{(m-4)}_{n-4} + \ldots + (n-1)(n-2)\ldots(n-m+4)\,S'''_{n-m+3} + (n-1)(n-2)\ldots(n-m+3)\,S''_{n-m+2} + (n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)\,S'_{n-m+1} + (n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)\,S_{n-m}$$

perchè, se si suppone di voler determinare il numero $S^{(m)}_n$ dei termini che nello sviluppo di una determinante di ordine n contengono a fattore $(n-m)$ elementi principali, dalla relazione:

$$(a^{(m-2)}) \qquad \Delta_{n,n} = e_P\,\Delta_{n-1,n-1} + (n-1)\,e_N \Big[e_N\,\Delta_{n-2,n-2} + (n-2)\,e_N \big(e_N\,\Delta_{n-3,n-3} + \ldots + (n-m+3)\,e_N \big\{ e_N\,\Delta_{n-m+2,n-m+2} + (n-m+2)\,e_N \big(e_N\,\Delta_{n-m+1,n-m+1} + (n-m+1)\,e_N\,\Delta_{n-m+1,n-m} \big) \big\} \ldots \Big]$$

che si otterrebbe dalla (a'') per successive sostituzioni, in cui è d'uopo applicare la formola (b), si scorge che:

ep $\Delta_{n-1,n-1}$; $\Delta_{n-2,n-2}$; $\Delta_{n-3,n-3}$; ... $\Delta_{n-m+2,\,n-m+2}$; $\Delta_{n-m+1,n-m+1}$; $\Delta_{n-m+1\,.\,n-m}$ ci dànno rispettivamente $S^{(m)}_{n-1}$, $S^{(m-2)}_{n-2}$, $S^{(m-3)}_{n-3}$, ... S''_{n-m+2}, S'_{n-m+1} e S_{n-m} dei termini che cerchiamo.

Dalla (R), dopo aver cambiato n in $n+1$ si ha per l'integrazione:

$$(r)\qquad S^{(m)}_{n} = \Sigma \left\{ n\, S^{(m-\ )}_{n-1} + n\,(n-1)\, S^{(m-3)}_{n-2} + \dots\, n\,(n-1) \dots (n-m+5)\, S'''_{n-m+4} + n\,(n-1) \dots (n-m+4)\, S''_{n-m+3} + n\,(n-1) \dots (n-m+3)\, S'_{n-m+2} + n\,(n-1) \dots (n-m+2)\, S_{n-m+1} \right\};$$

la costante essendo nulla [1].

Abbiamo così delineata la via da percorrere per determinare il numero dei termini dello sviluppo di un determinante di ordine n, che contengono a fattore $(n-2)$, $(n-3)$ ... $(n-m)$, elementi principali. Ma conformemente a quanto si è già lasciato intravvedere in principio noi possiamo calcolare altrimenti un tal numero. E poichè, come si vedrà in seguito, lo troveremo espresso in funzione di quello delle permutazioni relative, dal confronto delle sue due espressioni potremo ottenere quest'ultimo.

---

[1] I simboli S_n, S'_n, S''_n, S'''_n, ... $S^{(m)}_n$ sono stati definiti per i casi in cui $n \geqq 2$ e $m < n$.

Ora, siccome i primi membri delle equazioni alle differenze:

$$S''_n = S''_{n-1} + (n-1)\, S_{n-2}$$
$$S'''_n = S'''_{n-1} + (n-1)\, S'_{n-2} + (n-1)(n-2)\, S_{n-3}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S^{(m)}_n = S^{(m)}_{n-1} + (n-1)\, S^{(m-2)}_{n-2} + \dots$$

conserverebbero ancora un senso ben determinato, quando si facesse rispettivamente $n = 2, 3, \dots m$, mentre cesserebbero di averne i secondi; occorre estendere tali definizioni ai casi in cui $n = 0$, $n = 1$, e $m > n$.

Converremo perciò che $S_n = 1$ e $S'_n = 0$, non solo per tutti i valori di $n \geqq 2$, ma anche per i valori 0 e 1 di n; e che $S^{(m)}_n = 0$ per tutti i valori di $m > n$.

Queste convenzioni giovano per concludere in modo facile che tutte le costanti provenienti dall'integrazione delle equazioni alle differenze sono nulle.

Osservo da ultimo che i simboli precedenti potrebbero ancora definirsi per i valori negativi di n, ma mi dispenso dal farlo, non occorrendo al nostro scopo.

Si è già osservato che un determinante di ordine n contiene tanti termini nel suo sviluppo, quante sono le permutazioni che possono farsi con n cose; o in altri termini, che se:

$$a_1\, b_2\, c_3 \ldots r_{n-2}\, s_{n-1}\, t_n$$

è un termine dello sviluppo di un determinante di ordine n, si ottengono tutti gli altri permutando in tutti i modi le lettere, e tenendo fermi gli indici; oppure permutando in tutti i modi gli indici, e tenendo ferme le lettere.

Noi supporremo per es. di permutare in tutti i modi gli indici; e di più che il termine precedentemente scritto sia tutto composto di elementi principali. Allora è evidente che il numero dei termini dello sviluppo del determinante aventi a fattore $(n-2)$ elementi principali, sarà uguale al numero delle combinazioni degli n elementi principali precedenti $(n-2)$ a $(n-2)$, moltiplicato per quello delle permutazioni relative di 2 cose. Indicando, per brevità, quest'ultimo numero colla lettera α, avremo

$$(1') \qquad S''_n = \alpha \frac{n(n-1)}{2\,!}.$$

Similmente, il numero dei termini dello sviluppo del determinante, aventi a fattore $(n-3)$ elementi principali, sarà uguale al numero delle combinazioni degli n elementi principali $(n-3)$ a $(n-3)$, moltiplicato per quello delle permutazioni relative di 3 cose; e se indichiamo quest'ultimo numero con β, avremo:

$$(2') \qquad S'''_n = \beta \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}.$$

Si otterrebbe analogamente una nuova espressione per S^{IV}_n, S^{V}_n, ...; e cioè:

$$(3') \qquad S^{IV}_n = \gamma \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\,!}$$

$$(4') \qquad S^{V}_n = \delta \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\,!}$$

. . . .

e dal confronto delle (1) e (1'); (2) e (2'); (3) e (3'); (4) e (4'); ... si determineranno i valori di α, β, γ, δ, ... Si trova:

$$\alpha = 1, \ \beta = 2, \ \gamma = 9, \ \delta = 44, \ \ldots$$

Ricordando la relazione di ricorrenza espressa dalla formula (r),

possiamo concludere la seguente regola pratica per determinare il numero delle permutazioni relative:

Il numero delle permutazioni relative di 2, 3, 4, 5, ... cose è uguale rispettivamente ad 1, 2, 3, 4, ... volte i numeratori delle frazioni seguenti:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{53}{24}, \frac{309}{120}, \dots$$

Infatti si ha:

$$1=\frac{1}{1};\ 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6};\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{8}=\frac{53}{24};$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{11}{30}=\frac{309}{120}, \dots$$

Tali frazioni sono legate da relazioni ricorrenti. Ponendo:

$$1+\frac{1}{2}=A_4;\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=A_5;$$

se si indica la successiva frazione con A_6, avremo:

$$A_5+\frac{A_4}{4}=A_6$$

onde A_6 rimane espressa in funzione delle due frazioni che precedono.

Avremo ancora similmente [1]:

$$A_6+\frac{A_5}{5}=A_7;\ A_7+\frac{A_6}{6}=A_8;\ A_8+\frac{A_7}{7}=A_9;\ \dots$$

Riguardo alle permutazioni relative possiamo ancora enunciare il seguente teorema:

Il numero delle permutazioni relative di n cose eguaglia quello dei termini dello sviluppo di un determinante di ordine n, che non contengono a fattore nessun elemento principale.

---

[1] Se indichiamo rispettivamente con a_4, a_5, a_6, ... i numeratori delle frazioni A_4, A_5, A_6, ... potremo scrivere:

$$A_4=\frac{a_4}{2!};\ A_5=\frac{a_5}{3!};\ A_6=\frac{a_6}{4!};\ \dots$$

e se Q_4, Q_5, Q_6, ... sono i numeri delle permutazioni relative di 4, 5, 6, ... cose, avremo altresì:

$$Q_4=3\,a_4;\ Q_5=4\,a_5;\ Q_6=5\,a_6;\ \dots$$

Per la legge di ricorrenza che governa le frazioni A_4, A_5, A_6, ... sarà poi:

$$A_6=\frac{a_5}{3!}+\frac{a_4}{2!}\,\frac{1}{4};\ A_7=\frac{A_6}{4!}+\frac{a_5}{3!}\,\frac{1}{5};\ \dots$$

Per dimostrarlo consideriamo una permutazione qualunque delle n lettere a, b, c, ... r, s, t

$$a_1\, b_2\, c_3 \dots r_{n-2}\, s_{n-1}\, t_n\,.$$

Noi potremo supporla formata cogli elementi principali di un determinante di ordine n, in quanto si è collocato a al 1° posto; b al 2°; c al 3°; ecc. ... Ma siccome per ottenere da essa una permutazione relativa qualunque, noi dobbiamo, per definizione, permutare le lettere a, b, c, ... r, s, t, in modo tale che nessuna venga ad occupare il posto che prima le era assegnato, possiamo evidentemente concludere che dopo un tale cambiamento, le lettere a, b, c ... r, s, t, cessano di essere elementi principali.

A simile risultato si poteva pervenire, del resto, ricorrendo alle formule trovate.

Basta infatti fare nelle (1), (2), (3), (4), ... rispettivamente $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, ... e si ottiene:

$$S''_2 = 1\,;\; S'''_3 = 2\,;\; S^{\text{IV}}_4 = 9\,;\; S^{\text{V}}_5 = 44\,;\; \dots$$

Ne segue come corollario che *ogni determinante di ordine n il quale ha la sua diagonale principale formata di n zeri, contiene tanti termini nel suo sviluppo quante sono le permutazioni relative di n cose* (¹).

Terminerò questo mio lavoro facendo cenno di una nota del signor

---

e in generale

$$A_n = \frac{a_{n-1}}{(n-3)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-4)!}\,\frac{1}{n-2}$$

ossia:

$$(n-3)!\,A_n = a_{n-1} + (n-3)\,a_{n-2}\,\frac{1}{n-2}\,.$$

Ma:

$$(n-3)!\,A_n = \frac{A_n}{n-2}$$

epperciò:

$$a_n = (n-2)\,a_{n-1} + (n-3)\,a_{n-2}$$

ossia:

$$Q_n = (n-1)\,(Q_{n-1} + Q_{n-2})\,.$$

Questa è la formula di Eulero.

(¹) Questo teorema è implicitamente contenuto nella formula:

$$F^{(0)} = n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

del signor J. Weyrauch, *Giorn. di Crelle*, vol. 74, pag. 273, la quale ci fornisce il numero dei termini dello sviluppo di un determinante di ordine n, avente la diagonale principale formata di n zeri, perchè si ha, indicando

C. A. Laisant (1), nella quale vien trattato un problema analogo a quello che mi sono proposto, ma più generale. Presi in considerazione n oggetti a, b, c, ... l, e supposto che si sia formato il prospetto di tutte le permutazioni tali che il 1° rango, il 2°, ecc., non possano essere occupati in ciascuna di esse che da certi di questi oggetti, in essa l'A. si propone di determinare il numero di queste permutazioni.

Designando con a_1 b_1 c_1 ... gli oggetti che possono occupare il 1° rango; con a_2 b_2 c_2 ... quelli che possono occupare il 2°; ecc., e posto:
$(a_1+b_1+c_1+\ldots)(a_2+b_2+c_2+\ldots)\ldots(a_n+b_n+c_n+\ldots)=\mathrm{F}(a,b,c\ldots l)$
essendo F una funzione intera, omogenea e del grado n delle variabili a, b, c, ... l, egli dimostra che il numero X delle permutazioni che si è proposto di determinare è dato da

$$\mathrm{X}=\frac{\partial^n \mathrm{F}(a,b,c\ldots l)}{\partial a\,\partial b\,\partial c\ldots\partial l}\,.$$

Genova, 24 febbraio 1894.

---

il 2° membro con ψ_n (v. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig, 1881, pag. 40)

(*) $$\psi_n=n\,\psi_{n-1}+(-1)^n$$

da cui:

$$\psi_{n+1}=n\,(\psi_n+\psi_{n-1})$$

che è la formola data da Eulero per il numero delle permutazioni relative.

Il sig. Weyrauch (l. c.) dà ancora altre formule, fra le quali una per il numero dei termini dello sviluppo di un determinante, che contengono m elementi principali a fattori, e cioè:

$$\mathrm{F}^{(m)}=(n-m)!\binom{n}{m}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right].$$

Siccome però potremo anche scrivere, per le notazioni precedenti:

$$\mathrm{F}^{(m)}=\binom{n}{m}\psi_{n-m}$$

e cambiando m in $n-m$:

$$\mathrm{F}^{(n-m)}=\binom{n}{n-m}\psi_m$$

si vede che la formula del sig. Weyrauch non differisce in sostanza, in ogni caso particolare, da quelle che io ho indicato con (1'), (2'), (3'), ...

Infatti le α, β, γ ... rappresentano in quest'ultime i numeri delle permutazioni relative ad una data di 2, 3, 4 ... cose; e in quella del signor Weyrauch, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ... i numeri dei termini dello sviluppo di determinanti di 2°, 3°, 4°, ... ordine, aventi la diagonale principale formata di zeri. Ma questi numeri sono rispettivamente uguali.

(1) Comptes Rendus, 2° sem. 1891, pag. 1047.

Un precursore della Logica matematica.

Nel II vol. delle *Miscellanea Taurinensia* (*) pubblicato nell'anno 1761, (parte 3ª, pag. 46-63) trovasi un lavoro di Ludovico Richeri, col titolo: *Algebrae philosophicae in usum artis inveniendi, specimen primum.*

L'A. tenta risolvere il celebre problema di Leibniz; perciò indica con segni speciali i varii enti che compaiono in logica e metafisica; cioè il possibile e l'impossibile, il tutto e il nulla, il determinato e l'indeterminato, il sì e il no, il necessario e il contingente ... È a notarsi che i segni pel *tutto* e *nulla* sono rispettivamente $\cup$ e $\cap$, e di ben poco diversificano da quelli del formulario di Matematica.

Le idee dell'A. sono profonde, ed egli spera ottenere notevoli risultati; dice a pag. 59:

« ... Combinationes principaliores speciminis ergo indicamus; cœteras iisdem insistens principiis quisque inveniet, et non sine voluptate simplicissimam fœcunditatem experietur, quemadmodum ex secundo specimine constabit, ubi, Deo dante, algebræ philosophicæ theoriam omnem, et ejus applicationes tentabimus, et tum demum de arte inveniendi universalissima judicium erit. »

Ma questa seconda parte non è comparsa. E in questa prima l'A. non seppe ancora liberarsi dalla metafisica; questo lavoro si deve considerare come un semplice tentativo. Le sole proposizioni appartenenti al formulario di Matematica che trovansi nella memoria dell'A. sono

$$a \cap -a = \Lambda \quad , \quad a \cup -a = \mathrm{V} .$$

(P.)

(*) Come è noto, esso è il titolo della pubblicazione periodica fondata da Lagrange, Cigna, ..., che assunse più tardi il nome di « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino ».

Pensiero matematico moderno.

Conferenza tenuta dal prof. Simone Newcomb *all'adunanza annuale della Società Matematica di New-York il giorno 28 dicembre 1893. — Versione dall' inglese, cortesemente concessa dall' autore, di* Ottavio Zanotti Bianco.

Chi, al pari di me, non è matematico nel senso moderno, sente naturalmente di doversi in qualche modo giustificare d'aver accettato l'invito col quale questa Società mi ha onorato, d'intrattenerla intorno ad un argomento matematico. Forse una giustificazione adeguata potrebbe trovarsi nella considerazione, che chi non si è profondamente addentrato in nessuno dei problemi contemporanei delle matematiche, ma che, come uno studente, ha avuto sufficiente passione per il soggetto da tenersi informato del corso generale del pensiero in esso, può prendere tale generale veduta che sia appropriata alla presente occasione. Io vi domanderò pertanto di considerare alcuni paragoni fra i modi di pensare sopra soggetti matematici del giorno d'oggi, e quei metodi che giunsero a noi dal passato, coll'intendimento di accennare in qual direzione stia il progresso, e quale sia il significato della ricerca matematica del tempo presente.

Fra le varie letture della mia gioventù fuvvi un'istoria dell'Europa moderna, che finisce con una rivista generale del progresso nelle arti, nelle scienze e nella letteratura e con un tentativo di previsione dell'avvenire di esse. Per quanto io ne posso giudicare, quell'opera fu scritta intorno al tempo di Eulero o Lagrange. Sull'argomento delle matematiche la conclusione dell'autore era che l'investigazione fruttifera pareva terminata, e che vi era poca prospettiva di brillanti scoperte nel futuro. A noi, un secolo dopo, questo giudizio potrebbe sembrare un esempio del pericolo di far profezie, e condurci a riguardare l'autore come uomo troppo propenso ad affrettate conclusioni. Può darsi tuttavia che un'analisi accurata conduca a ritenere le vedute dell'autore per meno avventate di quel che possano sembrare ora. Possiamo noi non dire, che nella speciale direzione, e lungo le speciali vie battute dall'indagine matematica un secolo fa, non si son fatte scoperte vera-

mente brillanti? Possiamo noi realmente dire che il campo di lavoro di Eulero, fu, dopo il suo tempo, largamente esteso? Dei grandi problemi che eludevano l'abilità degli antichi geometri, comprendendovi la quadratura del circolo, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, non ne risolvemmo pur uno. Il nostro solo progresso nel trattarli è stato di mostrare che essi sono insolubili. Al problema dei tre corpi non abbiamo aggiunto un solo degli integrali necessari alla completa soluzione. Il nostro calcolo integrale elementare è vecchio di due secoli. Per l'equazione generale del quinto grado solo mostrammo che non esiste soluzione alcuna. Senza dubbio, noi risolviamo molti dei problemi che i Bernoulli ed i loro contemporanei si divertivano a proporsi a vicenda, molto meglio di quello che essi abbiano fatto; ma, dopo tutto, potremmo noi toccare a qualche soluzione che fosse oltre i loro poteri? Io parlo con qualche diffidenza su questo punto, ma mi sembra che il progresso si verificò risalendo ai principii elementari, per partirne ad esaminare tutto il campo della ricerca matematica da un piano più elevato di quello sul quale stavano i nostri predecessori, piuttosto che continuando sulle loro traccie.

Noi possiamo illustrare questo passaggio a nuovi modi di pensare paragonando la dottrina di Euclide della ragione e proporzione colla nostra. Nessuno discute la bellezza od il rigore del procedimento, per mezzo del quale Euclide svolse questa dottrina nel suo libro quinto e l'applicò alla teoria dei numeri nel suo libro settimo. Ma possiamo noi trattenerci dal compiangere i nostri avi, che dovevano imparare le proposizioni complesse e le ponderose dimostrazioni del quinto libro, del quale noi possiamo scrivere in un sol foglio di carta tutti i procedimenti ed i risultati? Come disciplina mentale lo studio era eccellente; ma sembra appena possibile che si potesse rammentare le proposizioni ed i metodi di dimostrarle, se non se ne avesse altra conoscenza all'infuori di quella ricavata dall'opera stessa. Quando noi esaminiamo attentamente queste proposizioni, noi troviamo che, mentre Euclide riconosceva il fatto che, di due rapporti, uno potrebbe essere maggiore, minore od uguale di un altro, tuttavia egli non li riguardò mai come quantità, che potevano essere usate come operandi. Da questo punto di vista una ragione era sempre una relazione, ed una relazione non può esistere senza due termini.

Nell'accennare a questa complessità della dottrina di Euclide, non voglio si creda che io accetti il modo poco rigoroso in cui la dottrina in questione è d'ordinario svolta nei nostri trattati moderni. Ciò che noi dovremmo aver di mira si è di sostituire i metodi di Euclide con quelli che spettano alla matematica moderna. Oggidì noi intendiamo che una relazione fra due enti qualsivoglia della medesima specie

può sempre essere ridotta ad un solo termine, ad essa sostituendo un operatore la cui funzione sia di cambiare uno di questi enti nell'altro. Nel caso della relazione fra due linee, considerate semplicemente come quantità ad una dimensione, la qual relazione si chiama un rapporto, noi riguardiamo il rapporto come un fattore numerico o multiplo, che operando sopra una linea la cambia nell'altra. Ad esempio, quella relazione che Euclide avrebbe espressa dicendo che due linee stavano l'una all'altra come 5 a 2, ovvero che due volte una linea era uguale a cinque volte l'altra, noi esprimeremmo ora col dire che se noi moltiplicassimo una delle linee per due e mezzo, noi otterremmo l'altra. Questo potrebbe apparire semplice differenza di parole, ma è molto di più. È semplificazione di idee; è sostituzione di un sol concetto a due. Per esprimere una relazione occorrevano ad Euclide due termini; a noi ne basta uno.

Ma ciò non è la sola semplificazione. Una particolarità della nostra matematica moderna è che gli operatori medesimi sono riguardati come oggetti indipendenti di ragionamento; suscettibili di divenire operandi senza specificazione delle loro peculiari qualità come operatori. Così, in luogo di considerare il rapporto che io ho testè menzionato come un'operazione di moltiplicare una linea per due e mezzo, noi la riduciamo per ultimo alla semplice quantità due e mezzo, che noi possiamo concepire rimanga inerte finchè noi la portiamo all'attività come un moltiplicatore. Esso così assume una forma concreta capace di essere maneggiata nel pensiero, e di essere operata come se fosse una cosa distinta.

Questo esempio può offrire come un punto di partenza per un'illustrazione più larga del modo in cui noi abbiamo esteso i concetti che stanno a base del pensiero matematico. Prendiamo a riflettere sulla relazione fra una linea retta che parte da un punto, ed un'altra linea di eguale lunghezza partente dal punto medesimo, ma ad angolo retto colla prima. Se questa relazione fosse stata proposta ad Euclide come argomento a studiarsi, egli avrebbe probabilmente risposto, che quantunque molto più semplice di quelle intorno a cui si occupava, egli non poteva scorgervi nulla di fruttifero, e non avrebbe tratto da essa alcuna conclusione. Ma se poi proseguiamo a riflettere, troveremo davanti a noi un vasto campo, comprendente il primo concetto di gruppi; e con esso una parte importante delle nostre matematiche moderne. In conformità al principio già prestabilito, noi sostituiamo alla relazione fra queste due rette un'operatore che muterà la prima nella seconda. Noi definiamo quest'operatore dicendo che la sua funzione è di girare una retta di un angolo retto in un piano fisso che la contiene. Questa definizione permette di applicare l'operatore in

questione ad ogni linea nel piano. Applichiamola pertanto due volte di seguito alla stessa retta. Il risultato sarà una retta volgentesi alla direzione opposta a quella della originale. Una terza operazione la porterà di nuovo ad angolo retto dalla parte opposta alla seconda posizione; ed una quarta la ricondurrà alla sua posizione originale; il risultato essendo di portarla attorno di un circolo completo. Se ora noi consideriamo le operazioni che sarebbero state equivalenti a queste, una, due, tre, quattro rivoluzioni di un angolo retto come quattro operatori separati, noi vediamo che il loro risultato sarà o di lasciare la retta nella sua posizione originale, o di muoverla ad una di tre posizioni definite. Se quindi noi ripetiamo una di queste quattro operazioni tante volte quante ne piace, od in qualsiasi ordine vogliamo, noi unicamente condurremo la retta ad una delle quattro posizioni in questione. Così noi abbiamo un gruppo del quarto ordine, dotato della proprietà che la ripetizione di due qualunque delle operazioni del gruppo è equivalente a qualche unica operazione di esso.

Appena occorre che io richiami l'attenzione all'analogia famigliare fra queste operazioni e moltiplicazioni successive per l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$. Quest'ultima considerata come un moltiplicatore è fornita delle stesse proprietà del nostro operatore ruotante. Ripetuta due volte muta il segno o la direzione della quantità sulla quale opera; ripetuta quattro volte la riconduce al suo valore originale.

Noi abbiamo in tutti questi casi un'illustrazione molto semplice di una legge del pensiero, l'applicazione della quale forma la base di una parte importante della ricerca matematica moderna. La si può chiamare la legge di omologia. Io non sono certo di saperla definire rigorosamente, ma io credo che la si possa esprimere ad un dipresso come segue: Se abbiamo due classi di enti A e B, tali che ad ogni ente di una classe corrisponda un ente dell'altra, e ad ogni relazione fra due qualunque di una classe corrisponda una relazione fra i corrispondenti due dell'altra, allora tutto il discorso, il ragionamento, le conclusioni riguardanti l'una classe potranno essere applicati all'altra classe. Noi possiamo, naturalmente, estendere la legge a una corrispondenza fra cose o concetti, e simboli od altre forme di linguaggio.

Io penso che questa legge sia più universale che a primo aspetto appaia. Non solamente il progresso, ma l'esistenza stessa della nostra razza dipende dalla coordinazione fra i nostri processi mentali ed i processi dell'universo esterno, che fu gradatamente portata innanzi dall'attrito fra l'uomo e la natura attraverso innumerevoli generazioni. Un uomo è perfetto, potente, efficace quanto più il suo modo di rappresentarsi la natura è in armonia coi processi della natura stessa; ogni

processo di natura avendo la sua immagine nel pensiero, e *viceversa*. Ora, il linguaggio consiste nel coordinamento fra parole ed idee. Così noi passiamo dalla natura a ciò che vi corrisponde nel pensiero, e dal pensiero a ciò che vi corrisponde nel linguaggio, e così poniamo in azione una corrispondenza fra il linguaggio e la natura.

La ricerca scientifica moderna offre molti esempi dell'applicazione di questa legge che sarebbero meravigliosi, se non fossero così famigliari. Noi siamo così avvezzi alla predizione di un'ecclisse, che non vediamo in essa alcuna filosofia. E tuttavia non potrebbe un essere molto intelligente di un'altra sfera scorgere alcun che di meraviglioso nel fatto che con un metodo di tracciare simboli colla penna e l'inchiostro sulla carta, e di combinarli secondo certe semplici regole, è possibile di predire con certezza infallibile che l'ombra della luna in un dato giorno, ad una data ora e dato minuto, passerà sopra un determinato luogo della superficie della Terra. Certamente quell'essere potrebbe domandare con sorpresa come si possa ottenere un tale risultato. La nostra risposta sarebbe semplicemente questa: Vi è una corrispondenza da uno ad uno fra i simboli che il matematico traccia sulla sua carta e le leggi di movimento dei corpi celesti. Questi simboli incorporano i metodi stessi della natura.

L'introduzione e l'applicazione di omologie come quelle che ho indicate hanno forse il loro massimo valore, in quanto risparmiano pensiero. Nel campo della meditazione matematica hanno qualche rassomiglianza colle macchine che nel campo dell'economia risparmiano lavoro. Esse permettono di raggiungere i risultati del raziocinio senza passare per il processo del ragionamento nel caso particolare. Molto di quanto dissi illustra quest'uso del metodo, ma vi è un altro caso che fu così fruttifero da meritare speciale menzione: io intendo la teoria generale delle funzioni di una variabile immaginaria. Noi possiamo riguardare tali funzioni come rappresentanti in realtà una coppia di funzioni di una certa classe implicanti una coppia di variabili reali; ma la difficoltà di concepire le varie guise in cui le due variabili possono essere collegate, ed i risultati dei cambiamenti che esse possono subire, in tal guisa da cavar fuori tutti i risultati possibili, avrebbe reso impossibile il loro studio diretto.

Ma quando Gauss e Cauchy concepirono l'idea geniale di rappresentare due tali variabili, la reale e l'immaginaria, colle coordinate rettangolari di un punto in un piano, queste relazioni che prima esigevano grandi sforzi per essere concepite divennero relativamente semplici. Considerata come una grandezza, una variabile complessa, ovvero la somma di una quantità reale e di una puramente immaginaria, l'ultima essendo riguardata come una quantità misurata in unità im-

maginarie, fu rappresentata dalla lunghezza e posizione di una linea retta condotta dall'origine delle coordinate al punto le cui coordinate erano rappresentate dai valori della variabile. Una tal retta, quando se ne consideri e la lunghezza e la direzione, è ora famigliarmente nota come un vettore. La concezione del vettore sarebbe tuttavia in molti casi laboriosa. Ma il vettore è completamente determinato dal suo punto terminale, ad ogni vettore corrisponde uno ed un solo punto terminale e ad ogni punto terminale uno ed un solo vettore. Quindi si può astrarre dal vettore ed in pensiero badare solamente al punto terminale. Dacchè per ogni coppia di valori che noi assegniamo alle nostre variabili originali vi è un punto, ed un solo, noi possiamo in pensiero astrarre da entrambe quelle variabili e dai vettori che esse rappresentano, e considerare solamente il punto del quale esse sono le coordinate. Così la variazione continua delle due quantità, per quanto complessa possa essere, è rappresentata dal moto di un punto. Ora tal moto è molto facile a esser concepito. Noi possiamo considerarlo, senza la minima difficoltà, come compiente un numero di rivoluzioni attorno a qualche posizione fissa, mentre l'immaginare le corrispondenti variazioni nelle variabili algebriche stesse, richiederebbe un notevole sforzo di mente. Così, e solamente così, la bella teoria, prima svolta ampiamente da Cauchy, e poi continuata da Riemann, fu portata al suo stato attuale di perfezione.

Un altro esempio del principio in questione, in cui i due soggetti del ragionare sono così prossimamente d'una fatta, che non si risparmia pensiero, è offerto dal principio di dualità in geometria proiettiva. Qui si stabilisce una corrispondenza da uno a uno fra le relazioni mutue di punti e rette, col risultato che nel dimostrare una proposizione relativa a questi concetti noi contemporaneamente dimostriamo una proposizione correlativa formata dall'originale scambiando semplicemente le parole « punto » e « retta ».

Gli argomenti dei quali trattai finora appartengono ad un tempo all'algebra ed alla geometria. Invero uno dei grandi risultati dell'introduzione della interpretazione omologa nella matematica moderna è stato di unificare il trattamento dell'algebra e della geometria, e quasi di fonderle in un'unica scienza. Ad una larga classe di teoremi d'algebra spettano corrispondenti teoremi di geometria, ciascuno di una classe provandone uno dell'altra classe. Così le due scienze si porgono mutuamente aiuto. Nella geometria noi abbiamo una rappresentazione visibile dei teoremi algebrici; colle operazioni algebriche noi raggiungiamo conclusioni geometriche, cui potrebbe essere molto più difficile il pervenire col ragionamento diretto. Un esempio ragguardevole ce l'offre l'applicazione geometrica della teoria degl'inva-

rianti. Questi sono forse, fra le sorta di conclusioni algebriche, l'ultima che lo studente, al quale sono mostrati per la prima volta, possa credere abbia un'applicazione geometrica, tuttavia ben poco studio basta a stabilire un'omologia completa fra essi e la distribuzione di punti sopra una linea retta.

Quest'uso di omologie non segna la sola linea, lungo la quale noi siamo proceduti più dei nostri predecessori. Il progresso fu possibile solo coll'emanciparci da taluni dei concetti dell'antica geometria che signoreggiano tuttora nel nostro insegnamento elementare. L'illustrazione che ho già dato calza qui perfettamente. L'espressione della relazione di due linee rette a mezzo del moltiplicatore che cambierebbe l'una nell'altra è ora famigliare ad ogni scuolaro, e la relazione stessa era famigliare ad Euclide. Ma la relazione ancora più semplice di una retta con un'altra di eguale lunghezza normale ad essa, non fu mai immaginata da Euclide, e non ha corso nelle nostre scuole. Perchè è così? Mi sembra che ciò derivi dall'idea avita, che la matematica si occupa della misura, e che l'obbietto della misura si è di esprimere tutte le grandezze in misura ad una dimensione. Quest'idea ha così completamente informato il linguaggio, che noi ancora estendiamo l'uso della parola « eguale » a tutti i casi di questa specie particolare di uguaglianza lineare: noi diciamo che un circolo è uguale al rettangolo contornato dal suo raggio e dalla sua semicirconferenza. Noi fummo pertanto costretti ad inventare la parola « congruente » per la eguaglianza assoluta in ogni punto, o di qualificare l'aggettivo « eguale » con « identico » dicendo « identicamente eguale ». Naturalmente non vi è obbiezione di sorta al paragone di grandezze in questa maniera riferendole a misura ad una dimensione, o col presupporre che il cambiamento che una quantità deve subire per essere trasformata nell'altra dev'essere espresso da un solo parametro; ma cambiamenti che implicano due o più parametri sono altrettanto importanti quanto quelli che ne implicano uno, ed il tentativo di esprimere tutte le relazioni metriche riferendole ad un solo parametro ha posto al pensiero tali restrizioni, che mi sembra appropriato l'applicare il termine emancipazione al nostro atto di liberarci da esse. Per noi la matematica non è più la scienza della quantità. Ma anche se noi consideriamo che l'oggetto ultimo delle matematiche è relazione fra quantità, noi abbiamo raccolto un ricco compenso dalla emancipazione, perchè coll'uso delle nostre più vaste idee noi siamo in grado di raggiungere nuove conclusioni circa le relazioni metriche.

Io spero che il mio discorso non sarà trovato troppo accademico se continuo con qualche ulteriore illustrazione delle omologie dei gruppi. Ritornando alle omologie tra linee, invece di prendere due rette fra loro

ad angolo retto, consideriamone due facenti un angolo di 10°. Come già si notò, questa relazione è omologa con un operatore che faccia girare una sola retta di quell'angolo. Se noi ripetiamo continuamente questa operazione, noi porteremo la retta in trentacinque posizioni differenti, la posizione trentaseiesima sarà identica con quella originale. Così in tutto noi avremo trentasei posizioni, espresse da quel numero di rette uscenti da un unico centro e facenti fra di loro angoli di 10°. Ora immaginiamoci trentasei operatori, la cui funzione sia di girare una retta, non importa quale, successivamente di 10°, 20°, 30°, ecc., fino a 360°, l'ultimo essendo equivalente ad un operatore che fa semplicemente niente. Questi trentasei operatori formeranno un gruppo, che noi sappiamo essere strettamente omologo colla moltiplicazione per le trentasei espressioni

$$e^{i\varphi}\,, \quad e^{2i\varphi}\,, \quad e^{3i\varphi} \ldots \quad e^{36i\varphi} = e^0 = 1\,,$$

ove φ è l'arco di 10° in misura circolare.

Fin qui non considerammo che operazioni formate dalla ripetizione continua di una sola; nel linguaggio del soggetto, tutti i nostri gruppi sono costrutti da potenze di un solo operatore. Ora estendiamo il nostro metodo sostituendo un cubo alla nostra linea retta. Attraverso a questo cubo noi abbiamo un asse parallelo a quattro delle sue faccie piane. Col girare il cubo attorno a quest'asse di qualsiasi multiplo di 90°, noi otteniamo uno scambio di posizione fra quattro delle sue faccie. Questo processo di scambio è omologo colla rotazione di 90°, essendo in realtà ad essa equivalente, e quindi è anche omologo alla moltiplicazione per l'unità immaginaria. Ma vi è anche un'altra omologia. Indichiamo con A, B, C, D le 4 faccie del cubo parallele all'asse di rotazione. Allora il nostro gruppo di rotazioni sarà omologo colle potenze di una sostituzione ciclica fra le quattro lettere A, B, C, D. S'introduca ora un nuovo operatore, cioè la rotazione attorno ad un asse perpendicolare al primo, ma sempre di un arco di 90°. Ciò introduce nel problema un nuovo elemento, e ci permette di mutare il cubo da una qualunque posizione ad un'altra qualunque, vale a dire di eseguire ogni scambio fra le faccie che sia consistente col loro rimanere faccie dello stesso cubo. Qui noi abbiamo una serie di rotazioni, le quali, nel caso del cubo, sono omologhe con certe trasformazioni lineari che sono state svolte da Klein nel suo bellissimo lavoro sull'Icosaedro.

Ma è anche evidente che nell'introdurre queste rotazioni noi praticamente operiamo con quaternioni, l'operatore essendo il vettore unità. Così noi abbiamo un'omologia fra certe forme di moltiplicazione di quaternioni e trasformazioni lineari involgenti l'unità immaginaria.

Di più, dacchè queste rotazioni sono anche omologhe con sostituzioni praticate sopra i sei simboli rappresentanti le sei faccie del cubo, ne segue che vi è anche un'omologia fra certi gruppi di sostituzioni e certe trasformazioni lineari involgenti due quantità, un numeratore ed un denominatore, e moltiplicazioni di quaternioni per vettori unità.

Io ho preso un cubo come l'esempio più semplice. Evidentemente noi possiamo costrurre un maggior numero di gruppi di sostituzioni della stessa specie fra le faccie di qualsiasi solido regolare, come Klein ha fatto nel lavoro già citato. La relazione fra le sostituzioni lineari così trovata e la soluzione delle equazioni algebriche corrispondenti, forma uno dei più bei rami della nostra matematica moderna.

L'idea di gruppi di operazioni, quale io cercai di svolgerla, fu in questi ultimi anni così estesa da coprire una gran parte del campo dell'algebra e della geometria. Fra i primi in tale estensione vi fu Sophus Lie. Considerata dal punto di vista algebrico, la sua idea, nella sua forma più semplice, può essere espressa come segue. Noi abbiamo una certa quantità, x ad esempio. Noi abbiamo anche un'operazione qualsiasi che noi possiamo eseguire sopra questa quantità. Sia questa operazione dipendente da una certa quantità a che necessariamente entra in essa. Come uno degli esempi più semplici, noi possiamo ammettere che l'operazione sia quella di aggiungere a ad x. Poichè la quantità a può prendere un'infinità di valori, ne segue che vi saranno infinite operazioni appartenenti tutte ad una classe, le quali operazioni saranno distinte dal valore particolare di a in ogni caso. Così noi operiamo sopra x con uno di questi operatori, ed otteniamo un certo risultato; sia x'. Noi operiamo sopra x' con un secondo operatore della stessa classe, ed otteniamo un secondo risultato, sia x''. Se il risultato x'' si è potuto ottenere dalla quantità originale x a mezzo di qualche operazione della classe, qualunque sia l'operatore scelto in essa, allora queste operazioni saranno tali che il prodotto di due di esse sarà equivalente all'effettuazione di alcune di esse. Così, ripetendole per sempre noi non potremo arrivare ad altro che a quello che si otterrebbe a mezzo di qualche operatore. Vediamone un esempio semplice: se la nostra operazione consiste nell'addizione di una quantità arbitraria ad x, allora noi cambiamo x in x' aggiungendo ad x una certa quantità a, ed x' in x'', aggiungendovi una certa quantità b. Il risultato di queste due addizioni è lo stesso che se noi avessimo aggiunto da principio $a+b$. Occorre appena dire che la moltiplicazione di x per una quantità qualunque sarebbe un altro esempio della stessa specie. L'effettuazione di un qualsivoglia numero di moltiplicazioni successive sopra una quantità è sempre uguale ad una moltiplicazione sola pel prodotto di tutti i fattori delle moltiplicazioni separate.

Queste operazioni non sono confinate a quantità singole. Noi possiamo considerare che l'operazione sia effettuata sopra un sistema di quantità, che sono così trasformate in un egual numero di quantità differenti, ciascuna di queste nuove quantità corrispondendo ad una del primo sistema. Se una ripetizione dell'operazione sopra il secondo sistema di quantità dà origine ad un terzo sistema, che avrebbe potuto derivarsi dal primo sistema con un'operazione della stessa classe, allora tutte queste operazioni possibili formano un gruppo.

L'idea di tali sistemi di operazioni non è punto nuova. Fu sempre ovvio, da che si cominciò a studiare la teoria generale delle operazioni algebriche, che ogni combinazione delle operazioni di addizione, moltiplicazione e divisione poteva sempre essere ridotta ad un sistema in cui fosse solamente necessaria un'unica operazione di divisione — così come in aritmetica una frazione complessa, qualunque sia l'ordine di complessità dei suoi termini, può sempre essere ridotta ad una sola frazione semplice, cioè al rapporto di due intieri, ma non può in generale essere ridotta ad un intiero. Abel fece uso di questo teorema nella celebre memoria sulla impossibilità di risolvere l'equazione di quinto grado.

Un altro campo di pensiero matematico, affatto distinto da quello sul quale gettammo uno sguardo, può essere chiamato il paese delle fate della geometria. Per fare un matematico si richiede un più alto sviluppo del suo potere speciale, che non sia dato alla pluralità degli uomini. Quando egli entra in quella terra incantata egli deve, se vuol approfittare della buona occasione, prendere ali che lo porteranno molto oltre i voli, ed anche la vista dei mortali ordinarii. Al più immaginoso di questi, un essere racchiuso in una sfera, la cui superficie sia assolutamente impenetrabile, sarebbe così sicuramente imprigionato che neppure uno spirito potrebbe fuggirne, a meno di essere così etereo da passare attraverso alla sostanza della sfera. Ma lo spirito matematico, nello spazio a quattro dimensioni, potrebbe saltar fuori senza toccare neppure un punto del globo. Prendendo posizione ad una breve distanza dalla terra, egli potrebbe col suo telescopio investigare ogni particella di essa, dal centro alla superficie, senza alcuna necessità che la luce passi attraverso ogni parte della sostanza della terra. Se fosse abile ginnastico, egli potrebbe spiccare un salto mortale e cadere colla destra a sinistra, così come egli appare ai nostri occhi, se visto per riflessione in uno specchio, e ciò senza soffrire alcuna distorsione o male di sorta. Una linea retta, od una linea che ad ogni nostro esame apparirebbe retta, se seguìta a lungo sufficientemente, potrebbe ritornare su sè stessa. Lo spazio stesso può avere una delimitazione, o piuttosto, ve ne puo essere solo una certa quantità; procediamo innanzi, per sempre,

e noi potremmo trovarci sempre ritornanti al punto di partenza. Tutti questi risultati, invero, non si ottengono semplicemente in forma di scherzo, ma con dimostrazioni geometriche rigorose.

Le considerazioni che condussero a questa forma di spazio sono così semplici che esse possono venir delineate senza difficoltà. Quando il giovane incomincia lo studio della geometria piana, la sua attenzione è diretta intieramente su figure giacenti in un piano. Per lui lo spazio ha solo due dimensioni. In un dato punto di una linea retta si può innalzare una sola perpendicolare. Muovendo una linea qualunque nel piano, egli può descrivere una superficie, ma un solido è affatto fuori del suo campo. Egli non può condurre una linea dall'esterno all'interno di un cerchio, senza intersecarlo. Sopra una data base si possono costrurre solo due triangoli di lati dati, uno giacente da una parte della base, l'altro dall'altra. Quando egli giunge alla geometria solida, le sue concezioni si estendono grandemente. Da un dato punto di una retta egli può condurre tante perpendicolari quante vuole. Se egli ha due rette fra loro perpendicolari, egli può condurne una terza che sia perpendicolare ad entrambe. Una superficie piana non è avvinta al suo proprio piano, ma può essere mossa su e giù così da descrivere un solido. La caratteristica di questo movimento è che esso costantetemente porta ogni parte del piano ad una posizione, che nessuna parte di esso prima occupava.

Ora, è un principio fondamentale della scienza pura che la libertà di fare ipotesi è illimitata. Non è necessario di provare che l'ipotesi è una realtà, prima che ci sia permesso di farla. È legittimo di anticipare tutte le possibilità. È quindi, pertanto, un esercizio perfettamente legittimo del pensiero l'immaginare qual sarebbe il risultato se noi in geometria non ci fermassimo alle tre dimensioni, ma costruissimo una maniera di spazio che ne avesse quattro (*). Come il ragazzo, ad un certo stadio dei suoi studii, passa dalle due alle tre dimensioni, così possono i matematici passare con eguale facilità dalle tre alle quattro dimensioni. Egli s'imbatte bensì nella difficoltà di non poter tracciare figure in quattro dimensioni, e le sue facoltà sono così limitate che egli non può nella sua mente costrurre l'immagine delle cose come apparirebbero nello spazio a quattro dimensioni. Ma questa mancanza non gl'impedisce di ragionare sul soggetto, ed una delle più ovvie

---

(*) La libertà delle ipotesi è piena; però non sarà inutile il ricordare ai lettori della Rivista che cogli spazî a più dimensioni si introducono nuovi postulati; mentre si perfeziona la Geometria riducendone il numero. Veggasi vol. I (1891), pag. 66 della Rivista. Nota dell'editore.

conclusioni alle quali arriverebbe è questa: Come nello spazio a due dimensioni si può in un dato punto condurre una retta perpendicolare ad un'altra, e coll'aggiungere una terza dimensione, una terza retta, può condursi perpendicolare a queste due; così con una quarta dimensione noi possiamo condurre una retta che sia perpendicolare a tutte tre. È vero che noi non possiamo immaginare come apparirà quella retta, o dove dovrà essere collocata, ma ciò è puramente in causa della limitazione delle nostre facoltà. Come una superficie descrive un solido abbandonando continuamente lo spazio nel quale essa sta al momento, così un solido a quattro dimensioni sarà generato da un moto continuo che sia costantemente diretto all'infuori di questo spazio a tre dimensioni nel quale il nostro universo sembra esistere. Siccome un uomo confinato entro un circolo, può sfuggirne saltando sopra esso, così il matematico, se posto dentro una sfera in uno spazio a quattro dimensioni, salterebbe semplicemente sopra essa altrettanto facilmente di quello che faremmo noi sopra un circolo segnato sul pavimento. Aggiungasi allo spazio una quarta dimensione, e vi è luogo per un indefinito numero di universi, tutti l'un dopo l'altro, come ve n'è per un indefinito numero di fogli di carta quando li poniamo l'un sopra l'altro.

Dal punto di vista delle scienze fisiche, la questione se l'attualità di una quarta dimensione possa essere considerata come ammissibile è molto interessante. Tutto quello che possiamo dire è che, fin dove giunge l'osservazione, tutte le conclusioni legittime sembrano essere contro di essa. Nessuna induzione della scienza fisica è più universale o completa di quella che tre condizioni fissano la posizione di un punto. Il fenomeno della luce mostra che nessuna vibrazione va fuori dello spazio a tre dimensioni, neppure nell'etere luminifero. Se vi è un altro universo, od un gran numero di altri universi, fuori del nostro proprio, noi possiamo unicamente dire che non abbiamo alcuna prova che esercitino sul nostro alcuna influenza. È ben vero che quelli che si dilettano a spiegare avvenimenti anomali coll'azione di esseri, intorno ai quali d'altronde nulla conosciamo, hanno qui un ben facile campo per la loro immaginazione. La questione della sufficienza delle leggi di natura a chiarire tutti i fenomeni, è tuttavia troppo vasta per essere al presente discussa. A prova della limitatezza delle nostre facoltà in questa direzione, è a notarsi che noi siamo incapaci a pensare uno spazio a due dimensioni, altrimenti che come contenuto in uno spazio a tre. Un puro piano, con niente da ciascuna banda, è per noi inconcepibile. Noi siamo così costretti, per quanto valgono le nostre concezioni, ad accettare tre dimensioni e non di più. Noi abbiamo in questo un risultato legittimo dell'esperienza universale

attraverso a tutte le generazioni, che è quello di uno spazio triplamente esteso.

Intimamente connessa con ciò è l'idea di quello che viene talvolta chiamato lo spazio curvo. Confesso che questa espressione non mi piace, perchè non vedo come lo spazio per sè possa essere considerato come curvo. La geometria non è la scienza dello spazio, ma la scienza delle figure nello spazio, possedenti le proprietà di estensione e di mobilità che noi constatiamo essere comuni a tutti i corpi materiali. La questione qui sollevata è molto vecchia, ed in via generale la sua storia è famigliare.

I matematici hanno spesso tentato di costrurre una geometria senza l'uso di quello che è comunemente chiamato il nono assioma di Euclide, che sembra a me meglio espresso quando si dice che in un piano si può condurre una sola retta che debba essere parallela ad un'altra retta nel piano, nel senso di non incontrarsi mai in nessuna direzione. Tuttavia ogni conato per costrurre una geometria elementare senza quest'assioma risultò involgere una fallacia in qualche punto del ragionamento. Questa considerazione condusse Lobatchewsky, ed indipendentemente da lui, io credo, Gauss, a ricercare, se non potesse venir composta una geometria nella quale quest'assioma non fosse valido; nella quale, cioè, fosse possibile che avendosi in un piano due rette parallele, l'una potesse girare di un angolo piccolissimo senza però incontrare l'altra in alcuna direzione. La possibilità di ciò fu presto dimostrata, e si compose così un sistema di geometria nel quale la somma degli angoli di un triangolo piano potrebbe essere minore di due angoli retti.

Dopo fu introdotta anche l'ipotesi opposta. Si trovò che, date in un piano due rette parallele, si potrebbe supporre che esse s'incontrassero da ultimo in entrambe le direzioni. Questa ipotesi potrebbe anche essere fatta senza che vi fosse più d'un punto d'intersezione, ogni retta rientrando in sè stessa. La geometria risultante da queste due ipotesi fu ridotta ad un sistema rigoroso da Klein.

Il predire il futuro della scienza matematica sarebbe un tentativo arrischiato. Se lo si facesse, potrebbe sembrare che, in vista degli straordinarii lavori dell'intelletto umano che caratterizzano il nostro tempo, la via più sicura sarebbe di predire grandi scoperte in questo ed in tutti i rami della scienza. Si propone talvolta la questione, se non fosse ancora possibile che venisse inventato un metodo matematico, che fosse sul calcolo infinitesimale un progresso tanto grande, quanto questo lo fu sui metodi di Euclide e di Diofanto. In quanto al risolvere i problemi che ora ci si parano innanzi, può darsi che la strada più sicura sia quella di rispondere a quella questione colla negativa. Non

è egli vero in fisica come in matematica, che le grandi scoperte sono state fatte in direzioni inattese, e che i problemi che affaticavano i nostri avi ancora frustrano i nostri sforzi? Noi dobbiamo certamente ricordare che la scoperta di ciò che non poteva esser fatto fu un elemento importante nel progresso. Ad ogni piè sospinto noi c'imbattiamo nella ferrea legge della conservazione dell'energia; in ogni direzione noi scorgiamo i limiti del possibile. Le matematiche del ventesimo secolo potranno essere molto differenti dalle nostre; forse lo scolaro comincierà l'algebra colla teoria dei gruppi di sostituzioni, come egli potrebbe ora solo per abitudini ereditate. Ma non ne segue che la nostra posterità risolverà molti dei problemi che noi non possiamo sciogliere, od inventerà un algoritmo più potente del calcolo.

Sulla parte VI del Formulario.

1. La parte VI del *Formulario* è dedicata alla *teoria degli aggregati* (*Mannichfaltigkeitslehre, théorie des ensembles*). Di questa teoria, nata da poco più di un ventennio, io ho esposto succintamente i principi in un lavoro intitolato: *Notice historique sur la théorie des ensembles* (*Bibl. math.*, T. 6, 1892, p. 8-25), al quale potrà ricorrere chi voglia farsi un'idea sommaria dell'argomento.

Delle molte denominazioni nuove che compaiono nella teoria degli aggregati, parecchie furono definite nella raccolta di formole, mentre furono omesse quelle la cui introduzione non avrebbe portato alcun vantaggio nella rappresentazione coi segni della logica. Tali sono:

Condensato in tutto un campo. — Un insieme u di punti posti in uno spazio ad n dimensioni dicesi *condensato* (*überalldicht, condensé*) in tutto un campo A, quando in qualunque intorno di ogni punto di questo campo esistono punti di u; allora Du comprende l'intero campo A.

$u \varepsilon$ condensato in un campo $\mathrm{A} . = . \mathrm{A} \supset Du$.

Chiuso. — Un insieme dicesi *chiuso* (*abgeschlossen, fermé*) se comprende il suo derivato.

$u \varepsilon$ chiuso $. = . Du \supset u$.

Condensato in sè. — Un insieme dicesi *condensato in sè* (*insichdicht, condensé en soi*) se è contenuto nel suo derivato.

$u \varepsilon$ condensato in sè $. = . u \supset Du$.

Perfetto. — Un insieme dicesi *perfetto* (*perfect, parfait*) se è identico al suo derivato.

$u \varepsilon$ perfetto $. = . Du = u$.

Isolato. — Un insieme dicesi *isolato* (*isolirt, isolé*) se non ha elementi comuni col suo derivato.

$u \varepsilon$ isolato $. = . u \frown Du = \Lambda$.

Separato. — Un insieme dicesi *separato* (*separirt, séparé*) se non contiene alcun insieme parziale condensato in sè.

$u \varepsilon$ separato $. = : v \supset u . v \supset Dv . =_v \Lambda$.

2. Senza parlare di quelle parti della teoria che sono più conosciute, dirò qualche cosa intorno alle classi ordinate ed ai numeri trasfiniti (¹).

Una classe u di enti qualsiasi dicesi *ordinata* ($u \varepsilon$ Kord) quando, dati due elementi diversi x, y di u, è stabilito quale di essi *precede* l'altro. L'espressione *precede* (o *è seguito da*) può rappresentarsi col simbolo S; e la frase: « x precede y » si scrive allora $x \, \mathrm{S} \, y$. A questo concetto di precedenza o d'ordine non occorre attribuire un significato speciale (²); basta che esso soddisfaccia certe relazioni, e cioè:

a) Di due elementi diversi di una classe ordinata, uno ed uno solo precede l'altro:

$$x \, \mathrm{S} \, y \,.\, y \, \mathrm{S} \, x \,.=\Lambda \,. \qquad (\alpha)$$

b) Se x precede y ed y precede z, x precede z:

$$x \, \mathrm{S} \, y \,.\, y \, \mathrm{S} \, z \,.\supset.\, x \, \mathrm{S} \, z \,. \qquad (\beta)$$

Pertanto è impossibile dare del simbolo S una vera definizione logica sotto la forma:

$$x \, \mathrm{S} \, y \,.=. \ldots$$

dove il secondo membro non dovrebbe contenere S; ed è legittimo introdurlo senz'altro nelle formole, purchè sieno espresse la prima volta, e sottintese ogni altra, le relazioni (α) e (β). Ogniqualvolta però si specializzi il significato di S, si dovrà darne una definizione precisa; così p. es. se, essendo data una classe di grandezze reali, la intende-

---

(¹) Su questo argomento il prof. Burali-Forti ha pubblicato ultimamente un lavoro (*Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. VIII, 1894, p. 169-179), dove si è proposto in particolare di tradurre nei simboli della logica il concetto di *classe ordinata*. Egli definisce una classe ordinata come una *coppia* (u, α) o u_α, costituita da una classe u e da un *criterio ordinatore* α, in virtù del quale a ciascun elemento x di u sono assegnati come *seguenti* gli elementi αx della classe stessa. Il modo di vedere adottato dal signor Burali-Forti è forse preferibile a quello seguito in questo articolo perchè, almeno nella forma, più generale e più filosofico, figurando in esso scissi i due elementi che concorrono a costituire una classe ordinata; però non ne differisce essenzialmente, ed inoltre esige l'introduzione d'un maggior numero di nuovi concetti e simboli. Anche là l'idea d'*ordine* (sotto l'aspetto di criterio ordinatore) entra nella trattazione senza essere previamente analizzata, e ciò conferma indirettamente quanto si dirà più innanzi intorno alla *irriducibilità* di tale idea rispetto ai mezzi di cui dispone la logica matematica.

(²) Si confrontino i principi della teoria delle grandezze.

remo ordinata per modo che le grandezze minori precedano le maggiori, la S sarà definita da:

$$x \,\mathrm{S}\, y \,.=.\, x < y \,. \tag{γ}$$

Corrispondenza ordinata (ford) è una corrispondenza biunivoca fra 2 classi ordinate, tale che gli elementi d'una classe si trovino nello stesso ordine di precedenza dei loro corrispondenti dell'altra.

3. Un caso speciale delle classi ordinate sono le *classi ben ordinate* (Kbord), le quali possiedono le proprietà seguenti: di avere un primo elemento, e che per ogni elemento ne esiste uno immediatamente successivo; cioè:

$$\overline{x}\,\varepsilon\,(x\,\varepsilon\,u : y\,\varepsilon\,u \,.\, y \,\mathrm{S}\, x \,.=_y \Lambda) \,.-= \Lambda$$
$$x\,\varepsilon\,u \,.\, \supset_x .\!\cdot\!.\, y\,\varepsilon\,u \,.\, x \,\mathrm{S}\, y \,.\, \overline{z\,\varepsilon}\,(z\,\varepsilon\,u \,.\, x \,\mathrm{S}\, z \,.\, z \,\mathrm{S}\, y) = \Lambda : -=_y \Lambda \,.$$

Se fra gli elementi di due classi ben ordinate può stabilirsi una corrispondenza ordinata, si dice che esse hanno lo stesso *numero trasfinito* (Ntrasf). Se due classi ben ordinate u, v non hanno lo stesso numero trasfinito, può sempre determinarsi una classe ben ordinata w contenuta in una di esse, p. es. v, e avente lo stesso numero trasfinito dell'altra u. Si dice allora che il numero trasfinito di v è *maggiore* di quello di u, o che questo è *minore* di quello. I numeri trasfiniti formano quindi una classe di *grandezze ad una dimensione.*

Si può convenire di denotare con m (essendo m un numero naturale) il numero trasfinito della classe ben ordinata $0, 1, 2, \ldots, m-1$; allora la classe dei numeri trasfiniti comprende tutti i numeri naturali. Ogni classe formata d'un numero finito m di elementi, in qualunque modo si ponga sotto forma di una classe ordinata, costituisce una classe ben ordinata, il cui numero trasfinito è m. Segue da ciò che i numeri trasfiniti delle classi ben ordinate contenenti infiniti elementi sono diversi da $1, 2, \ldots$; ed è facile anche stabilire che sono maggiori di questi. La classe dei numeri trasfiniti può porsi sotto forma di una classe ordinata, colla condizione (γ); come questa sia una classe ben ordinata, si vedrà più innanzi.

4. Prima della definizione *formale* testè esposta dei numeri trasfiniti, il Cantor ne aveva data un'altra *reale*, o meglio *genetica.*

Sia u un aggregato di punti posti in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni; è noto che dei vari derivati Du, D^2u, D^3u,... ciascuno contiene tutti i seguenti.

Se v'ha un insieme di punti contenuto in tutti questi derivati, esso potrà denotarsi con $D^{\omega}u$, e i suoi derivati con $D^{\omega+1}u$, $D^{\omega+2}u$, ...

Parimenti se tutti questi hanno una parte comune, essa potrà denotarsi con $D^{\omega \cdot 2} u$, ecc. Per tal modo viene costituita una serie indefinita di simboli:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega \,.\, 2, \omega \,.\, 2+1, \ldots, \omega^2, \omega^2+1, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \quad (\delta)$$

la quale è evidentemente una classe ben ordinata. I simboli di cui essa si compone si ottengono in due modi: o si aggiunge un'unità ad un simbolo già noto (p. es. $\omega+1$, $\omega+2$, ω^2+1, ecc.), oppure si crea un nuovo simbolo che deve succedere a tutti i simboli già definiti (p. es. ω, $\omega \,.\, 2$, ω^2, ω^ω, ecc.). Questi due modi costituiscono i due *principi di formazione* (*Erzeugungsprincipe*) dei numeri trasfiniti. Convenendo di chiamare un numero trasfinito maggiore o minore di un altro secondochè esso lo segue o lo precede nella serie (δ), i due principi possono rappresentarsi così:

1. $\alpha \, \varepsilon \, \mathrm{Ntrasf} \,.\, \supset \,.\, \alpha + 1 \, \varepsilon \, \mathrm{Ntrasf}.$

2. $u \, \varepsilon \, \mathrm{KNtrasf} \,.\, \max u = \Lambda \,.\, \supset \,.\, \overline{\alpha \, \varepsilon} \, (x \, \varepsilon \, u \,.\, \supset_x \,.\, \alpha > x :: \beta \, \varepsilon \, \mathrm{N\,trasf} \,.$
$\beta < \alpha : x \, \varepsilon \, u \,.\, \supset_x \,.\, \beta > x \,.\!\cdot\!.\, =_\beta \Lambda) \, \varepsilon \, \mathrm{Ntrasf}.$

L'aggregato di tutti i numeri trasfiniti formati mediante ω ed i numeri naturali ha la prima potenza; per ottenere aggregati aventi potenza maggiore, occorre introdurre altri nuovi simboli. Il primo di questi, dopo ω, è Ω, il quale si definisce come il più piccolo numero trasfinito maggiore di tutti quelli costruiti mediante ω ed i numeri naturali. Se si indica in generale con Y_α la classe ben ordinata costituita da tutti i numeri trasfiniti non maggiori di α disposti in ordine crescente di grandezza, l'aggregato Y_Ω (dove pel momento si astrae dal fatto che esso sia una classe ben ordinata) ha la potenza 2, mentre l'aggregato Y_α, dove α è un numero trasfinito qualunque minore di Ω, ha la potenza 1. In generale l'introduzione d'un simbolo *del tutto nuovo* (cioè non composto mediante quelli già definiti) deve farsi sempre e soltanto quando l'insieme di tutti i numeri trasfiniti già definiti ha raggiunto una potenza maggiore di quella dell'insieme di tutti i numeri trasfiniti non maggiori di uno qualunque dei numeri già definiti; cioè un simbolo del tutto nuovo λ deve soddisfare alla seguente condizione:

$$\alpha \, \varepsilon \, \mathrm{N\,trasf} \,.\, \alpha < \lambda \,.\, \supset_\alpha \,.\, \mathrm{Nc}' \, Y_\lambda > \mathrm{Nc}' \, Y_\alpha .$$

In ciò consiste il *principio d'arresto o di limitazione* (*Hemmungs- oder Beschränkungsprincip*).

Se λ, μ sono due simboli del tutto nuovi, di cui il 2° è maggiore del 1°, e se fra λ e μ non ve ne sono altri della stessa natura, l'insieme dei numeri trasfiniti $\geqq \lambda$ e $< \mu$ si dice costituire una *classe* di numeri

trasfiniti. La classe I contiene i numeri naturali; la classe II i numeri formati mediante ω ed i numeri naturali; etc. Una classe di numeri trasfiniti è caratterizzata da ciò che, qualunque sia il suo elemento α, l'insieme dei numeri trasfiniti non maggiori di α ha una stessa potenza. Cioè:

$$u \, \varepsilon \text{ una } \textit{classe} \text{ di Ntrasf} . = \therefore \alpha , \beta \, \varepsilon \, u . \supset_{\alpha,\beta} . \; Y_\alpha \backsim Y_\beta : \alpha \, \varepsilon \, u . \beta \, \varepsilon \, (\text{Ntrasf} - u) . \supset_{\alpha,\beta} . \; Y_\alpha - \backsim Y_\beta .$$

Il numero trasfinito della classe ben ordinata $Y_\alpha - \alpha$ è α.

Se si ha una classe ben ordinata u, il suo numero trasfinito è quel numero α tale che tra u ed $Y_\alpha - \alpha$ si possa stabilire una corrispondenza ordinata.

5. Se tra gli elementi di due classi ordinate può stabilirsi una corrispondenza ordinata, si dice che esse appartengono ad uno stesso *tipo* (*Ordnungstypus*) *ad una dimensione.*

Abbiasi una classe, i cui elementi possano venire ordinati secondo n punti di vista differenti, o, come può dirsi, secondo *n dimensioni* (1). Una classe di tale natura (*classe ordinata secondo n dimensioni*, *n-fach geordnete Menge*) può rappresentarsi mediante un insieme di numeri complessi d'ordine n (2), le cui coordinate possono ritenersi ordinate secondo la loro grandezza crescente o secondo qualunque altro criterio. Se due classi ordinate secondo n dimensioni sono tali che la classe ordinata costituita dalle coordinate i-esime degli elementi della prima è dello stesso tipo della classe corrispondente della seconda, e ciò per qualunque valore di i da 1 ad n, si dice che le due classi appartengono ad uno stesso *tipo ad n dimensioni.*

I tipi ad n dimensioni sono grandezze, per le quali possono definirsi le operazioni di addizione e moltiplicazione. La loro teoria non è stata ancora studiata se non limitatamente ai tipi finiti, a cui si riferiscono i nn. XLIX, LI e LV della Lista bibliografica.

I numeri trasfiniti rientrano come caso particolare nella classe dei tipi; essi sono *i tipi ad una dimensione delle classi ben ordinate.*

G. Vivanti.

---

(1) Così p. es. un pezzo di musica è un insieme di note, le quali si possono classificare, ossia ordinare, secondo 4 direzioni, cioè secondo il tempo, il valore, l'intensità e l'altezza.

(2) Su questi numeri vedi Peano, *Lezioni di analisi infinitesimale*, Torino 1893, Vol. II, pag. 1 e segg.

Lista delle Abbreviazioni.

Connex	Connesso (§ 1, 22).
Contin	Continuo (§ 1, 24).
ford	Corrispondenza ordinata (§ 2, 8).
(vfu) sim cont	Corrispondenza biunivoca continua tra le classi continue u e v (*).
Kbord	Classe ben ordinata (§ 2, 9).
Kord	Classe ordinata (§ 2, 7).
Kord_n	Classe ordinata secondo n dimensioni (§ 2, 38).
Nalg	Numero algebrico (§ 1, 8).
Nc	Numero cardinale (§ 2, 1 e 2).
Ntrasf	Numero trasfinito (§ 2, 10 e 11).
S	Seguito da ... (§ 2, 7) (**).
Ty_1	Tipo ordinato ad una dimensione (§ 2, 39).
Ty_n	» ad n dimensioni (§ 2, 40 e 41).
Y_m	Classe ben ordinata formata dai numeri naturali non negativi e non maggiori di m, disposti in ordine crescente di grandezza (§ 2, 16).
Y_α	Classe ben ordinata formata dai numeri trasfiniti (incluso lo zero) non maggiori del numero trasfinito α, disposti in ordine crescente di grandezza (§ 2, 21).
$\Phi(m, n)$	Numero dei tipi ordinati ad n dimensioni di m elementi (§ 2, 47).
ω	Il più piccolo Ntrasf maggiore di tutti i numeri $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (§ 2, 20).
Ω	Il più piccolo Ntrasf maggiore di tutti i numeri della classe II (§ 2, 37).
II	Classe II di Ntrasf (§ 2, 27).
$\backsim$	Equivalente, avente la stessa potenza (§ 2, 1).

(*) Il concetto di corrispondenza o funzione continua verrà definito in simboli a proposito della teoria delle funzioni.

(**) Quando in una medesima formola compaiono più classi ordinate, occorre indicare a quale di esse si considerino come appartenenti i due simboli separati dal segno S; ciò si denota apponendo a questo segno come indice il simbolo rappresentante quella classe. Così $x \, \mathrm{S}_u \, y$ significa: x precede y nella classe ordinata u.

Prof. A. Sterza. — *Aritmetica razionale per il ginnasio superiore.* — Mantova, Mondovì 1893, 173 pagine in-8°.

Sebbene questa operetta si proponga come scopo principale lo svolgimento del programma governativo di aritmetica pel ginnasio superiore, l'autore di essa ha tuttavia creduto opportuno di toccare alcune nozioni più elevate, ritenendo — e a nostro avviso giustamente — che ciò valga a rendere nei discenti più profonda e completa la conoscenza delle parti elementari, e più facile il successivo apprendimento delle teorie superiori. Così speciali capitoli sono dedicati ai sistemi di numerazione considerati in generale (p. 10 e segg.), alla teoria dei numeri perfetti e dei numeri amicabili (p. 87 e segg.), alle congruenze (p. 95 e segg.), alle frazioni continue (p. 138 e segg.). Allo stesso concetto sono dovute le considerazioni introduttorie sulle idee di qualità e di quantità, da cui si deducono rispettivamente quelle di omogeneità e di grandezza (p. 5 e segg.), le osservazioni sulla relatività delle grandezze matematiche (p. 7 e segg.), le riflessioni sulle operazioni (p. 57-58), infine le numerose note storico-biografiche (pp. 5, 6, 8, 11, 17, 18, 21, 23, 24, 47, 79, 87, 96, 148) che dànno brevi ma esatte notizie sugli scienziati antichi e moderni menzionati nel testo. Tutto ciò dà al libro un carattere assai più scientifico e meno scolastico di quello della maggior parte delle opere congeneri, e fa di esso, più che un semplice libro di testo, una vera introduzione a studi più elevati. Di questo va data lode sincera all'autore, il quale ha così mostrato col fatto come non sia punto impossibile fare intravvedere ai giovanetti orizzonti più vasti di quelli che delimitano i programmi governativi, senza abbandonare per questo la maggiore semplicità ed elementarità di forma. Ed è veramente da augurarsi che l'indirizzo seguito dal prof. Sterza venga generalmente adottato nelle scuole secondarie, e massime nelle scuole classiche, dove l'istruzione, insieme allo scopo di fornire ai giovanetti un certo complesso di nozioni positive, ha quello di dar loro una buona coltura generale e di predisporne la mente a più alti studî letterari e scientifici.

Nel riconoscere come l'ordine, la chiarezza ed il rigore sieno in generale mantenuti in tutto il corso del libro, non possiamo però tacere

alcune osservazioni di dettaglio. — A p. 10 l'autore definisce l'eguaglianza come « l'espressione indicata di due quantità uguali », senza dire che cosa s'intenda per *quantità uguali*. Nel definire la sottrazione (p. 27) non viene osservato che tale operazione è possibile (nel campo dei numeri naturali) solo quando il diminutore è più piccolo del diminuendo; e tale omissione conduce appunto l'Autore a scrivere eguaglianze come questa: $8-9=8-(8+1)=8-8-1=-1$, le quali non hanno significato se non dopochè si siano estese, *per convenzione*, le leggi formali delle operazioni ai numeri negativi. A p. 83 viene invocato un teorema (se a divide bc ed è primo con b, esso divide c) di cui si cercherebbe inutilmente nelle pagine precedenti, nonchè la dimostrazione, anche l'enunciato. A p. 130 manca una dimostrazione esplicita del teorema fondamentale della teoria delle frazioni periodiche. Finalmente i numerosi esercizi (più di 200) che chiudono il volume sembrano messi insieme con una certa fretta, giacchè, oltre a parecchie ripetizioni (cfr. i NN. 51 e 55, 101 e 112, 106 e 111, N. 89 e p. 73 l. 6, N. 81 e p. 76 l. 18), vi si riscontra una grande ineguaglianza nel grado di difficoltà, di guisa che accanto a problemi di una semplicità estrema se ne trovano altri che riteniamo affatto inaccessibili ad allievi del ginnasio.

Queste poche mende non sono però tali da intaccare il pregio intrinseco del libro, e se vi abbiamo insistito è soltanto pel desiderio che l'Autore voglia farle sparire in una nuova edizione, che ci auguriamo prossima.

Mantova, 3 giugno 1894.

G. VIVANTI.

C. Burali-Forti. — *Logica matematica,* 1894 (Hoepli, Milano). (*)

La pubblicazione di questo Manuale viene a proposito per offrire ai non pochi che ora s'interessano ai progressi della Logica matematica il mezzo di farsi facilmente un concetto dello stato attuale di questa disciplina che va sempre più acquistando diritto di cittadinanza fra le scienze matematiche. Anche chi si trovasse affatto digiuno della materia può trovare nei primi capitoli del libro del Burali tutto ciò che gli abbisogna per porsi in grado di passare con lui in rassegna i principali metodi e alcune tra le più interessanti applicazioni del Calcolo logico.

L'A. comincia coll'esporre ordinatamente deducendole da undici ammissioni fondamentali le proprietà del segno di deduzione (Ɔ), quelle della somma e del prodotto logico di proposizioni, quelle della negazione, tutte le regole infine di qualche importanza che si riferiscono alle operazioni sulle proposizioni.

L'utilità del calcolo simbolico per la deduzione e trasformazione delle proposizioni viene messo in luce da un'opportuna scelta di esempi e applicazioni tratte in massima parte dall'aritmetica e dalla teoria dei numeri.

Procedendo innanzi l'A. prende ad esporre la teoria delle proposizioni condizionali e delle classi che esse determinano. Tale teoria viene assoggettata ad una trattazione accurata e dettagliata come richiede l'importanza dell'argomento troppo trascurato negli ordinari trattati di logica matematica. Il sistema di notazione e il procedimento sono quelli seguiti dal prof. Peano nelle sue varie pubblicazioni su questo soggetto.

L'A. chiarisce anzitutto il concetto di *proposizione condizionale* che egli definisce come una proposizione contenente una o più *lettere indeterminate,* intendendo per lettera indeterminata una lettera (o altro segno qualunque) che sta per rappresentare non un determinato individuo od oggetto, ma bensì un individuo od oggetto da scegliere ad arbitrio tra quelli per cui la proposizione ha un significato. Una

(*) Vedasi *El Progreso Matemático,* 1894, pag. 223.

proposizione condizionale, contenente per es. la lettera indeterminata x, non è per sè nè vera nè falsa; essa serve a definire o delimitare una classe, la classe cioè formata dagli oggetti o individui tali che, ponendo al posto di x un segno che li rappresenti, danno luogo a una proposizione vera, allo stesso modo come una equazione (che è appunto una proposizione condizionale di forma speciale) può servire a determinare i valori dell'incognita pei quali essa è soddisfatta.

Per indicare le relazioni tra classi definite per mezzo di proposizioni condizionali, in cui entri per esempio la lettera indeterminata x, l'A. introduce il segno $\supset_x$ (e il corrispondente $=_x$) che posto tra due tali proposizioni serve ad indicare l'inclusione della classe definita dalla prima proposizione in quella definita dalla seconda.

Passa quindi a studiare il tipo più semplice di proposizioni condizionali, quelle della forma $x \varepsilon a$, ove a rappresenta una classe comunque definita e il segno ε sta per indicare che l'individuo che si intende designato dal segno x, appartiene alla classe a. Invece di scrivere $x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon b$ (ove a e b sono due classi) l'A. conviene di scrivere $a \supset b$, osservando che con ciò non si dà luogo ad ambiguità non essendosi ancora attribuito alcun significato al segno $\supset$ allorquando compaia tra due segni rappresentanti delle classi. Giustifica tale nuova convenzione *dimostrando* che il segno $\supset$ tra due classi si trova soggetto alle stesse regole di calcolo del segno $\supset$ tra proposizioni.

Introduce quindi il segno $\overline{x \varepsilon}$ che messo davanti a proposizioni contenenti una lettera indeterminata x serve a designare le classi che esse rispettivamente definiscono. Per denotare le classi $\overline{x \varepsilon}(x \varepsilon a , x \varepsilon b)$, $\overline{x \varepsilon}(x \varepsilon a \cup x \varepsilon b)$, $\overline{x \varepsilon}(x - \varepsilon a)$ mostra l'A. come sia opportuno scrivere più semplicemente $a b$, $a \cup b$, $-a$ e ciò per le stesse ragioni accennate pel caso del segno $\supset$.

L'A. passa poi ad estendere le nozioni e convenzioni introdotte al caso di proposizioni contenenti più lettere indeterminate; riassume la teoria del Sillogismo e analizza il metodo di dimostrazione per riduzione all'assurdo indicando le precauzioni di cui si deve far uso nell'adoperarlo.

Segue un'appendice destinata a discutere alcune questioni la cui trattazione non avrebbe potuto trovar posto conveniente nella parte destinata all'esposizione sistematica della teoria. Vi si tratta anzitutto del *principio d'induzione completa* di cui si fa tanto uso in tutti i rami della matematica. Vengono poi esposte e chiarite con esempi le notazioni che si riferiscono al concetto di funzione, alle varie specie di corrispondenze, all'inversione delle funzioni, ecc.

L'A. passa poi a parlare delle definizioni di cui distingue quattro

specie. Con quelle di prima specie si conviene di attribuire a un nuovo segno o aggregato di segni di cui si vuol far uso, lo stesso significato che abbiamo attribuito a un altro segno o aggregato di segni non contenente *lettere indeterminate*. Quando i due aggregati di segni contengono una (o più) *lettere indeterminate*, delle lettere, cioè, che stiano per rappresentare uno qualunque tra gli individui d'una data classe, si ha la definizione di seconda specie. Tra queste sono a notare le *definizioni induttive*, specialmente importanti in matematica.

E infine suscettibili esclusivamente di applicazioni matematiche sono le due ultime specie di definizione, a cui l'Autore dà rispettivamente il nome di «*definizioni di un ente in sè stesso*» e «*definizioni per astrazione*». Malgrado il frequente uso dei procedimenti che le costituiscono, questi non furono mai, per quanto è a mia cognizione, distinti e formulati in termini generali in nessun trattato di logica matematica.

Le « *definizioni di un ente in sè stesso* » si hanno allorquando una classe viene ad essere caratterizzata semplicemente coll'attribuire agli individui che la compongono delle proprietà tali che, in conseguenza di esse, si possano stabilire tra gli enti stessi delle relazioni e delle operazioni per le quali sussistano delle determinate regole di calcolo. Del modo con cui queste regole di calcolo possono venir dedotte dalle proprietà primitive attribuite per definizione agli enti in questione l'A. dà un esempio analizzando i principi dell'aritmetica col metodo seguito dal prof. Peano (*Arithmetices principia*). È pure con definizioni di questa specie che vien caratterizzato il concetto di *grandezza* e vengono distinte le varie specie di *grandezze* nell'opera del prof. R. Bettazzi sulla *Teoria delle grandezze*. Queste definizioni si presentano spesso sotto la forma di postulati, coi quali veniamo a introdurre o foggiare (*erschaffen*) nuovi enti di cui può esserci utile indagare le proprietà.

Finalmente le definizioni di quarta specie si hanno quando, data una proposizione condizionale $p_{x,y}$ contenente due lettere indeterminate x, y (o due gruppi di lettere indeterminate) si ritiene opportuno introdurre un nuovo segno di funzione, per es. φ, e un nuovo segno di relazione, per es. α, convenendo che la scrittura $(\varphi x)\,\alpha\,(\varphi y)$ abbia lo stesso significato della proposizione p_{xy}. Con questa convenzione, che in sostanza equivale a una definizione di seconda specie, vengono a esser definite una funzione e una relazione delle quali, in conseguenza appunto della loro definizione, si possono dimostrare certe proprietà fondamentali, corrispondenti alle proprietà della proposizione p_{xy}. Quindi precisamente come nel caso delle definizioni di terza specie, si rende possibile la deduzione d'un sistema di regole di calcolo che permette di giungere poi con maggior semplicità e con un procedimento

quasi meccanico, a dei risultati a cui solo con difficoltà e per mezzo di ragionamenti complicati si sarebbe arrivati, senza il potente sussidio del linguaggio simbolico.

Giova notare che questo modo di procedere è tanto più conveniente, quanto meno le proprietà delle operazioni e relazioni che con esso si vengono a definire si scostano dalle proprietà di altre operazioni e relazioni già note, e sulle quali esiste già un *Algebra* che ci è famigliare. È da questa avvertenza che ripete la sua importanza la regola a cui accenna l'A. sotto il nome di *legge formale* o principio della conservazione delle proprietà dei segni (Permanenz Princip dell'Hankel) (*).

L'A. considera in modo speciale il caso particolare delle definizioni cosidette *per astrazione*, le quali sono possibili quando la proposizione p_{xy} è tale che la corrispondente relazione α viene a godere delle note proprietà caratteristiche dell'uguaglianza. L'A. esemplifica una tale estensione del significato del segno $=$ analizzando prima il concetto di eguaglianza tra numeri razionali, poi tra numeri reali, e mostra come partendo dalla nozione elementare di numero intero, si giunga, seguendo sempre sostanzialmente lo stesso processo di generalizzazione, al concetto più generale di *quantità*.

Nell'ultimo capitolo l'A. prende in considerazione le difficoltà che si presentano nelle questioni del seguente tipo: Data una classe di enti che goda di determinate proprietà (o supposte o sperimentalmente verificabili) scegliere fra tali proprietà quelle che possono servire per dare di questa classe una definizione di terza specie, dalla quale si possano poi dedurre per mezzo di dimostrazioni tutte le proprietà degli enti stessi. Perchè tale definizione sia la più semplice possibile, è necessario che le proprietà che con esse si attribuiscono agli enti studiati siano *indipendenti tra loro*, non ve ne sia, cioè, tra esse alcuna che si possa dedurre dalle altre. I metodi da seguire per accertarsi di ciò danno luogo ad alcune delle più interessanti applicazioni della Logica matematica e l'A. ne presenta qualche saggio.

Il nome dell'Editore mi dispensa dall'occuparmi di ciò che riguarda la parte tipografica.

Crema, 20 agosto 1894.

G. VAILATI.

(*) A questa denominazione lo SCHUBERTH, in un suo recente articolo sul giornale americano *The Monist* (Chicago, July, 1894), propone si sostituisca l'altra più significante di *principio dell'esclusione delle eccezioni (principle of no exception)*.

Sulla definizione d'equivalenza in Geometria

di S. Sbrana *a Pistoia.*

Nei trattati moderni di Geometria elementare, si suole svolgere la teoria dell'equivalenza dei poligoni, e quella dei prismi, partendo dalla definizione: due poligoni, o due prismi, sono equivalenti se possono decomporsi in egual numero di parti rispettivamente eguali; mentre l'equivalenza fra la superficie d'un cerchio e quella d'un triangolo, fra due piramidi e in generale fra due solidi, si dice che ha luogo quando essi sieno limiti di due grandezze variabili, che, nei loro stati corrispondenti, sono composte d'egual numero di parti rispettivamente eguali (*).

Ora, sebbene non si lasci di far notare, quando si stabilisce questa seconda definizione, che la medesima non contraddice alla prima e che anzi ne è un'estensione, sta il fatto che le due definizioni son ben differenti, *geometricamente*, l'una dall'altra, mentre il concetto fondamentale, intuitivo, che si vuole con le medesime esprimere è uno solo, quello dell'eguaglianza d'estensione, lo stesso per tutte le superficie e per tutti i solidi.

Per questa ragione, che riguarda l'uniformità del metodo, e per un'altra che dirò in seguito, sarei per proporre di ridurre le due definizioni a una sola e precisamente alla seguente:

« Due superficie piane, o due solidi, si diranno equivalenti quando « possano decomporsi in modo che ad ogni parte dell'una corrisponda « una parte eguale, ed una sola, nell'altra, e ad ogni parte di questa, « una, ed una sola, eguale nella prima. »

(*) Queste due definizioni comparvero la prima volta nel *Calcolo Infinitesimale* del Duhamel. Gli enunciati diversi dati alla seconda dal De-Paolis e dal Faifofer non ne hanno mutato il significato.

L'equivalenza fra una superficie curva (cilindrica, conica, sferica) e un poligono, è stabilita mediante definizioni *speciali* che non hanno nulla che fare con quelle generali sovracitate.

Per rendere però accettabile la mia proposta, dovrò dimostrare che la nuova definizione coincide colla prima delle due citate, quando la si applica ai poligoni o ai prismi, e coincide colla seconda quando la si applica alle altre superficie piane e agli altri solidi.

Intanto premettiamo che siccome essa differisce da quella comunemente usata per i poligoni e per i prismi, soltanto perchè *non esclude* il caso che il numero delle parti uguali possa essere anche infinito, è evidente che tutte le proposizioni stabilite sull'equivalenza e sulla non-equivalenza di queste medesime grandezze continueranno a sussistere anche rispetto alla nuova definizione.

Fra queste proposizioni giova rammentare le due fondamentali:

Una parte di grandezza non può essere equivalente all'intera;

Se due grandezze A e B sono equivalenti a una stessa C sono equivalenti fra loro;

e far rilevare, che la prima di esse, se si vuole assumere come postulato, non perde nulla della sua evidenza (*), e che l'altra, collo stesso ragionamento che suol farsi nell'ipotesi di un numero finito di parti, rimane dimostrata anche nell'ipotesi che il numero delle parti di A e C sia finito e quello di B e C sia infinito, come anche nell'ipotesi (per il nostro scopo inutile) che sia infinito l'uno e l'altro di questi due numeri.

Ciò premesso, sieno A e B due poligoni decomponibili in parti eguali in numero infinito; dico che essi si potranno decomporre in parti uguali anche in numero finito. Infatti, se s'immagina di trasformarli in due

---

(*) Pei poligoni questa proposizione, com'è noto ai lettori della Rivista, è stata dimostrata dal Gremigni nella nuova edizione (1893) dell'*Euclide*, l. I, deducendola dall'altra: (prop. E) « Se due poligoni sono eguali ed hanno una parte comune, la rimanente parte dell'uno è equivalente alla rimanente parte dell'altro ».

Ma disgraziatamente, la dimostrazione *rigorosa e generale* di quest'ultimo teorema è tutt'altro che semplice e facile a essere chiaramente intesa (v. l'articolo dello stesso Gremigni contenuto nel fascicolo maggio-giugno 1894 del Periodico di Matematica di Roma). E siccome la difficoltà sta principalmente nel dimostrare che il numero delle parti eguali, in cui si possono scomporre le parti non comuni dei due poligoni eguali, è sempre finito, qualcuno potrebbe credere che una volta tolta dalla definizione d'equivalenza la restrizione sul numero delle parti (finito), la dimostrazione stessa rimanesse di molto semplificata. Ma è chiaro che chi la pensasse così si aggirerebbe in un circolo vizioso, inquantochè la nuova definizione non può essere accettata se prima non si dimostra, com'io ho fatto, che rispetto ai poligoni e ai prismi essa ha la stessa portata dell'ordinaria, la qual cosa si fa fondandosi appunto sul postulato dell'equivalenza.

triangoli d'eguale altezza, A' e B', questi dovranno avere base eguale, perchè altrimenti essi e perciò anche i due poligoni dati non sarebbero equivalenti; ma se A' e B' hanno egual base e eguale altezza sono composti di parti rispettivamente eguali in numero finito, e poichè tali sono pure A e A', e , B e B', se ne deduce che gli stessi poligoni dati A e B devono potersi decomporre in parti eguali anche in numero finito.

Per due prismi il teorema si dimostra allo stesso modo, trasformandoli in due parallelepipedi d'egual base.

Passiamo ora a considerare due grandezze A e B (due superficie finite o due solidi finiti) limiti rispettivi di due variabili crescenti P_n e Q_n composte di parti eguali.

Essendo

$$P_1 + \sum_1^n (P_{r+1} - P_r) = P_n, \qquad Q_1 + \sum_1^n (Q_{r+1} - Q_r) = Q_n,$$

sarà,

$$\lim P_1 + \sum_1^n (P_{r+1} - P_r) = A, \qquad \lim Q_1 + \sum_1^n (Q_{r+1} - Q_r) = B,$$

e poichè le differenze $P_{r+1} - P_r$, $Q_{r+1} - Q_r$, sono composte di parti eguali, qualunque sia l'indice r, possiamo concludere che esistono per le grandezze date A e B divisioni tali per le quali ogni parte di A ha la sua corrispondente in B, e ogni parte di B ha la sua corrispondente in A.

Reciprocamente, se A e B soddisfano a questa condizione esse sono limiti di due variabili composte di parti eguali. Infatti, supposto che il numero delle parti in cui debbonsi dividere A e B sia infinito, che è il solo caso degno di nota, queste parti, per il postulato d'Archimede, dovranno decrescere indefinitamente. Indichiamole con p_1, p_2, p_3, ... disposte in ordine decrescente e formiamo le somme $\sum_1^{n_1} p_r$, $\sum_1^{n_2} p_r$, $\sum_1^{n_3} p_r$,...

Le differenze

$$A - \sum_1^n p_r \qquad B - \sum_1^n p_r$$

al crescere indefinito di n non possono mantenersi ambedue finite, perchè allora A e B conterrebbero altre parti eguali oltre le p_r, non possono essere una finita e una infinitesima perchè altrimenti vi sarebbero in A delle parti che non hanno le loro corrispondenti in B; perciò è forza concludere che queste due differenze sono ambedue infinitesime, ovvero che A e B sono limiti delle variabili $\sum_1^n p_r$, $\sum_1^n p_r$ composte di parti rispettivamente eguali.

L'altra ragione cui alludevo in principio, per la quale crederei conveniente modificare l'enunciato della definizione del Duhamel, nel modo indicato, è questa; che il teorema fondamentale sulle piramidi equivalenti può allora dimostrarsi direttamente, senza aver bisogno della teoria delle grandezze limiti, la qual cosa in una razionale fusione della geometria piana colla solida sarebbe evidentemente di non lieve vantaggio. La dimostrazione di questo teorema potrebbe farsi così:

Sieno date due piramidi triangolari VABC d'egual base ABC e di eguale altezza VH.

Si dividano gli spigoli per metà e sieno M, N, P, Q, R, S i punti di mezzo rispettivi di VA, VB, VC, AB, AC, BC. Le tre coppie di piani MNP, NPQR, NQS dividono ognuna delle due piramidi in quattro parti, due prismi e due tetraedri.

I due prismi contenuti nell'una sono equivalenti fra loro (perchè metà di parallelepipedi di base equivalente e d'eguale altezza) ed equivalenti a quei due contenuti nell'altra; e i due tetraedri dell'una sono eguali fra loro ed hanno rispetto a quelli dell'altra eguale base ed eguale altezza (metà di VH). Questi tetraedri danno luogo, colla stessa decomposizione, ad altri prismi equivalenti ed altri tetraedri simili ad essi e così via; per cui è chiaro che per le due piramidi date esistono divisioni tali per le quali ogni parte dell'una ha la sua corrispondente nell'altra e reciprocamente.

Pistoia, aprile 1894.

S. Sbrana.

Nuove pubblicazioni.

Hermann Grassmanns. — *Gesammelte mathematische und physikalische Werke, herausgegeben von* Friederich Engel. Ersten Bondes erster Theil. Leipzig, Teubner 1894, pag. 12+435. Prezzo Marchi 12.

D. Atanasio Lasala y Martinez. — *Teoría de las cantitades imaginarias.* — Bilbao, 1894, pag. VIII+149. Precio 6 pesetas.

Dott. S. Ortu Carboni. — *Geometria descrittiva ed elementare ed alcune sue applicazioni.* Vol. I, 1894. Ditta Paravia e Comp., pag. XIII+138. Prezzo L. 2,75.

Appunti di Aritmetica

per ITALO ZIGNAGO *a Genova.*

È assai facile accertarsi che dei numeri primi alcuni hanno fattori complessi, altri non ne hanno; lo è meno distinguerli in due specie mediante la loro forma.

A questo fine giova dimostrare il seguente

Lemma.

Se un intero reale e positivo è il prodotto di due interi complessi, che non ammettono divisori reali, esso è la somma di due quadrati primi fra loro.

Dimostrazione. — Sia h un intero reale positivo, prodotto di due fattori complessi interi $a+bi$ e $c+di$, che non hanno divisori reali.

Si osservi che a è primo con b; se no detto μ il massimo comun divisore fra a e b, il fattore $a+bi$ avrebbe il divisore reale μ; e similmente c è primo con d.

Dall'ipotesi fatta che h sia il prodotto dei due interi complessi

$$h = (a+bi)(c+di) \tag{1}$$

eseguendo nel secondo membro il prodotto indicato, si ottiene:

$$h = ac - bd + i\,(ad - bc) \tag{2}$$

Il primo membro è reale; quindi nel secondo il coefficiente di i deve essere nullo, e la parte reale uguale al primo membro:

$$\left.\begin{aligned} ad - bc &= 0 \\ ac - bd &= h \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Si consideri la prima di queste equazioni.

Poichè bc ed il secondo membro sono divisibili per b, anche ad deve esserlo; ma b è primo col fattore a, quindi divide l'altro fattore d

$$d = b\,k\,. \tag{4}$$

Sostituendo questa espressione dell'intero d nella prima delle (3), dividendo i due membri per b e ricavando c si ottiene

$$c = -a\,k\,. \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) ricordando che c e d sono primi fra loro si deduce

$$k = \pm 1 \tag{6}$$

perciò le stesse equazioni si trasformano in

$$\left.\begin{array}{l} c = \mp a \\ d = \pm b \end{array}\right\} (7)$$

dove i segni superiori si corrispondono e così gli inferiori.

Sostituendo nella seconda delle (3) ai numeri c e d queste espressioni, si ottiene per h la forma seguente:

$$h = \mp a^2 \mp b^2 \tag{8}$$

e siccome esso è positivo per ipotesi, i segni superiori non verificano l'equazione e quindi si ottiene

$$h = a^2 + b^2 \tag{9}$$

cioè h è la somma di due quadrati primi fra loro.

Osservazione I. — La reciproca di questa proposizione è vera e si riconosce con tutta facilità. Infatti se è:

$$h = a^2 + b^2$$

e i numeri a e b sono primi fra loro, si avrà anche

$$h = (a + bi)\,(a - bi)$$

e i fattori $a + bi$ e $a - bi$ non hanno divisori reali, perchè se per es. $a + bi$ avesse un divisore reale δ, sia a sia b sarebbero divisibili per δ.

Osservazione II. — Si è detto or ora che i segni superiori non verificano; tenendo conto di questa condizione le formule (7) si possono scrivere

$$\left.\begin{array}{l} c = a \\ d = -b \end{array}\right\} (10)$$

e per conseguenza è anche:

$$c + di = a - bi \tag{11}$$

vale a dire:

Se due interi complessi non hanno divisori reali ed il loro prodotto è reale e positivo essi sono numeri coniugati.

La reciproca non è vera perchè due interi coniugati possono ammettere divisori reali.

Il lemma dimostrato è contenuto in una proposizione più generale, la quale a sua volta può dedursi dal lemma stesso. È la seguente:

Proposizione.

Se un intero reale e positivo è il prodotto di due interi complessi, che hanno gli stessi divisori reali, esso è la somma dei quadrati di due interi reali. Il massimo comun divisore di questi interi è uguale al massimo divisore reale di entrambi i fattori complessi.

Dimostrazione. — Sia:

$$h = (a + bi)(c + di)$$

un intero reale positivo, μ il massimo divisore reale di $a+bi$; poichè $a+bi$ e $c+di$ hanno gli stessi divisori reali, esso è anche il più gran divisore reale di $c+di$. E siccome il massimo divisore reale di un intero complesso è dato dal massimo comun divisore dei suoi parametri, così μ è ad un tempo il massimo comun divisore dei numeri a e b e dei numeri c e d.

Per conseguenza si può porre:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1\,\mu \\ b &= b_1\,\mu \\ c &= c_1\,\mu \\ d &= d_1\,\mu \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

e risulta a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1.

Sostituendo nella (1) queste espressioni di a, b, c, d e raccogliendo μ^2 a fattore si ha per h l'espressione seguente:

$$h = \mu^2 (a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i). \qquad (13)$$

Siccome h e μ^2 sono reali e positivi deve esserlo anche il prodotto

$$(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i)$$

essendo poi a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1 nè l'uno nè l'altro dei fattori $a_1 + b_1 i$ e $c_1 + d_1 i$ ammette divisori reali; perciò $c_1 + d_1 i$ è coniugato con $a_1 + b_1 i$ e si ha

$$(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i) = a_1^2 + b_1^2. \qquad (14)$$

Sostituendo nella (13) al primo, il secondo membro di questa relazione, si trova

$$h = \mu^2 (a_1^2 + b_1^2) = (\mu\, a_1)^2 + (\mu\, b_1)^2. \qquad (15)$$

Concludendo h è la somma dei quadrati di due interi reali $\mu\, a_1$ e $\mu\, b_1$ e il massimo comun divisore di questi interi cioè μ è il massimo divisore reale dei fattori $a + bi$ e $c + di$.

Osservazione I. — La reciproca è esatta e facile a verificarsi. La somma di due quadrati si può decomporre nel prodotto di due fattori complessi, che hanno gli stessi divisori reali. Invero:

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$$

e i divisori reali sia di $a + bi$ sia di $a - bi$ sono i divisori comuni di a e b.

Osservazione II. — Anche la proposizione enunciata all'osservazione II del Lemma può estendersi in questo modo:

Se due interi complessi hanno gli stessi divisori reali ed il loro prodotto è reale e positivo essi sono coniugati.

Sia

$$h = (a + bi)(c + di)$$

reale e positivo e $a + bi$ e $c + di$ abbiano gli stessi divisori reali; se μ è il massimo comun divisore di a e b lo è anche di c e d e sono verificate le (12) ed è a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1; perciò $a_1 + b_1 i$ e $c_1 + d_1 i$ non hanno divisori reali. Anche la (13) è verificata e perciò il prodotto $(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i)$ è reale e positivo; pertanto ai numeri a_1, b_1, c_1, d_1 possono applicarsi le (10) e si ha

$$c_1 = a_1$$
$$d_1 = -b_1 .$$

Moltiplicando i due membri per μ ed applicando le (12) si ottiene:

$$c = a$$
$$d = -b$$

e per conseguenza:

$$c + di = a - bi$$

cioè i due fattori $a + bi$ e $c + di$ sono coniugati.

La reciproca è vera. Infatti il prodotto:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

è reale e positivo e i divisori reali sia di $a + bi$, sia di $a - bi$ sono i divisori comuni di a e b.

Ora si tratta di distinguere i numeri primi che hanno fattori complessi da quelli che non ne hanno, mediante la forma analitica; o, in termini più espliciti, è proposto il seguente

Problema.

Trovare una forma analitica la quale contenga tutti i numeri primi (positivi) che ammettono divisori complessi, ma non contenga alcuno degli altri numeri primi (positivi).

Si indichi con $f(x_1, \dots x_n)$ una tal forma; poichè sui valori composti di essa non si è fatta ipotesi alcuna, il ragionamento si limiterà ai valori primi. In conseguenza non saranno presi in considerazione tutti i valori delle variabili, ma soltanto quelli che rendono $f(x_1, \dots x_n)$ uguale a un numero primo.

Indicando con $a + bi$ e $c + di$ due fattori complessi, in cui può scomporsi $f(x_1, \dots x_n)$ si ha:

$$f(x_1, \dots x_n) = (a + bi)(c + di) \tag{16}$$

e per le ipotesi fatte si può ammettere che nessuno dei fattori complessi a secondo membro, sia una unità e nessuno dei numeri b e d sia uguale a zero.

Inoltre rappresentando rispettivamente con μ e ν i massimi divisori comuni di a e b e di c e d si può porre

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 \mu \\ b &= b_1 \mu \\ c &= c_1 \nu \\ d &= d_1 \nu \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

e risulta ancora a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1.

Sostituendo nella (16) ai numeri a, b, c, d le loro espressioni date dalle (17) e mettendo $\mu\nu$ in evidenza si ottiene:

$$f(x_1, \dots x_n) = \mu\nu (a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i). \tag{18}$$

Si consideri il prodotto:

$$(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i).$$

Essendo a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1 i fattori $a_1 + b_1 i$ e $c_1 + d_1 i$ non hanno divisori reali. Il prodotto è poi reale e positivo, perchè tali sono f, μ, ν.

Perciò $c_1 + d_1 i$ è coniugato con $a_1 + b_1 i$ e si ottiene

$$(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i) = a_1^2 + b_1^2.$$

Dunque la funzione che si cerca è della forma:

$$\varphi(\mu, \nu, a_1, b_1) = \mu\nu(a_1^2 + b_1^2) \tag{19}$$

ma si può porre sotto un'altra più semplice; siccome φ è numero primo dei due fattori $\mu\nu$ e $a_1^2 + b_1^2$ uno è uguale all'unità, l'altro è uguale a φ, quindi si possono immaginare due casi

$$\mu\nu = \varphi \quad \text{e} \quad a_1^2 + b_1^2 = 1$$

oppure

$$\mu\nu = 1 \quad \text{e} \quad a_1^2 + b_1^2 = \varphi.$$

Nel primo la seconda relazione si scinde in due

$$a_1 = \pm 1 \quad \text{e} \quad b_1 = 0$$

oppure

$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad b_1 = \pm 1.$$

Sia $b_1 = 0$; allora anche $b = \mu b_1$ deve essere zero contro l'ipotesi.

Sia $b_1 = \pm 1$; allora deve essere $a_1 = 0$. Perciò (essendo $c_1 + d_1 i$ coniugato con $a_1 + b_1 i$) si avrà ancora:

$$c_1 = 0 \qquad d_1 = \mp 1$$

e per conseguenza

$$a+bi=\mu(a_1+b_1i)=\mu(\pm i)$$
$$c+di=\nu(c_1+d_1i)=\nu(\mp i)\,.$$

Essendo $\varphi=\mu\nu$ un numero primo sarà $\mu=1$ oppure $\nu=1$; quindi uno dei due numeri $a+bi$ e $c+di$ è uguale ad una unità imaginaria contro l'ipotesi.

Pertanto il caso

$$\mu\nu=\varphi \qquad \text{e} \qquad a_1^2+b_1^2=1$$

rimane escluso e si conclude

$$\varphi=a_1^2+b_1^2 \tag{20}$$

cioè:

La funzione più generale che risolva il problema ha i valori primi positivi comuni con $a_1^2+b_1^2$.

Osservazione I. — La reciproca è vera:

Se in una funzione i valori primi positivi sono i numeri primi, somma di due quadrati, essa contiene fra i numeri primi positivi quelli che sono il prodotto di due fattori complessi e nessun altro.

Dimostrazione. — Si indichi con φ questa funzione; intanto si vede che è vera la seconda parte della proposizione, perchè i valori primi di φ essendo la somma di due quadrati sono della forma $(a+bi)(a-bi)$. Viceversa ogni numero primo positivo che sia il prodotto di due fattori complessi è un valore della funzione φ. Invero un tal numero, come si è visto nel problema precedente, è la somma di due quadrati.

Osservazione II. — In particolare la funzione a^2+b^2 risolve il problema.

Osservazione III. — Se si considerano solo i numeri primi dispari la funzione $4n+1$ è un'altra soluzione.

Infatti le due forme a^2+b^2 e $4n+1$ contengono gli stessi numeri primi dispari e positivi.

Così se si vuole che il problema ammetta una soluzione della forma $ax+b$ basta modificarne l'enunciato parlando di numeri primi dispari, anzichè di numeri primi.

Questa modificazione è essa necessaria?

Ponendo la domanda in termini più precisi si fa la seguente

Questione.

Esiste una forma lineare $ax+b$, la quale fra i numeri primi positivi contenga tutti e soli quelli che sono il prodotto di due fattori complessi?

Ecco una serie di osservazioni che conduce a deciderla.

Osservazione I. — I numeri della forma $ax+b$ sono i numeri delle forme

$$4ax+b \qquad 4ax+a+b \qquad 4ax+2a+b \qquad 4ax+3a+b$$

cioè se un numero è della forma $ax+b$ è di una delle altre quattro e viceversa.

Osservazione II. — Se $ax+b$ è una soluzione, il numero a è primo coi quattro numeri

$$b \qquad b+a \qquad b+2a \qquad b+3a\,.$$

Infatti $ax+b$ contiene tutti i numeri primi positivi, che sono il prodotto di due fattori complessi, per conseguenza tutti i numeri primi positivi della forma $4x+1$. Ciò esige che a sia primo con b. Ma se a è primo con b è noto che qualunque sia k è anche primo con $ak+b$. Dunque, ecc.

Osservazione III. — Se $ax+b$ è una soluzione il numero a è pari.

Sia dispari, le espressioni

$$4ax+b \qquad 4ax+a+b \qquad 4ax+2a+b \qquad 4ax+3a+b$$

divise per 4 daranno quattro resti differenti, cioè i quattro numeri

$$0\,, \quad 1\,, \quad 2\,, \quad 3\,,$$

presi in un certo ordine.

Quelle che danno i resti

$$0\,, \quad 2\,, \quad 3\,,$$

non possono contenere numeri primi dispari (positivi). Per le due prime la cosa è evidente; quanto alla terza lo diventa ricordando che $ax+b$ non contiene numeri primi positivi della forma $4n+3$.

Per conseguenza esse devono essere forme composte; onde dei quattro numeri

$$b \qquad b+a \qquad b+2a \qquad b+3a$$

tre hanno un fattore comune con $4a$. E siccome a è primo con tutti e quattro, il fattore comune è un divisore di 4, cioè dei quattro numeri tre sono pari. Ma d'altra parte dando i resti 0, 1, 2, 3 nella divisione per 4, i numeri suddetti devono essere due pari e due dispari.

Dunque: Se $ax+b$ ecc.

Osservazione IV. — Le quattro espressioni

$$4ax+b \qquad 4ax+a+b \qquad 4ax+2a+b \qquad 4ax+3a+b$$

sono della forma $4n+1$.

Par assurdo una di esse p. e. $4ax+3a+b$ non lo sia. Dei numeri primi positivi essa non può contenere alcuno della forma $4n+1$, essendo di forma differente, nè alcuno della forma $4n+3$ altrimenti anche $ax+b$ dovrebbe contenerne, contro l'ipotesi. Perciò fra i numeri

primi positivi non potrà contenere altro che il 2. Ora le forme $ax+b$ prime contengono infiniti numeri primi positivi, dunque $4ax+3a+b$ è una forma composta cioè $3a+b$ ha un fattore comune con $4a$. Questo fattore dev'essere un divisore di 4 perchè a è primo con $3a+b$; perciò $3a+b$ è pari; ma si è visto già che a è pari, quindi anche b deve esserlo; perciò a e b avrebbero un divisore comune (il due), mentre per ipotesi sono primi fra loro. Quest'ultima osservazione mostra che la forma $ax+b$ non può contenere il numero due e che per conseguenza la forma in questione non esiste.

Corollario.

Eulero fu il primo a dimostrare che i divisori della somma di due quadrati primi fra loro sono la somma di due quadrati.

Questa proposizione risulta facilmente da quanto precede.

Sia:

$$N = a^2 + b^2$$

e sieno a e b primi fra loro, si dica p un divisore primo di N.

Esso ha un fattore complesso. Si neghi, poichè esso divide

$$N = (a+bi)(a-bi)$$

dividerà uno dei fattori $a+bi$ oppure $a-bi$ e per conseguenza sarà un divisore comune di a e b. Ciò non può essere perchè a e b sono primi fra loro.

Poichè p è un numero primo (positivo), ed ha un fattore complesso esso è la somma di due quadrati.

Così dimostrata la proposizione pei divisori primi, si estende ai divisori composti con un metodo ben noto, cioè osservando che ogni divisore composto è un prodotto di divisori primi e che se più numeri sono la somma di due quadrati, lo è anche il loro prodotto.

Genova, 26 luglio 1894.

PS. — Alcune proposizioni del lavoro possono volgersi facilmente in logica matematica, p. e. il Lemma e la Proposizione si traducono in

$$a,b,c,d \,\varepsilon\, \mathrm{n} . h \,\varepsilon\, \mathrm{N} . h=(a+bi)(c+di) . \mathrm{D}(a,b)=1 . \mathrm{D}(c,d)=1 . \supset . h=a^2+b^2$$
$$\text{»} \qquad . \mathrm{D}(a,b)=\mathrm{D}(c,d) . \supset . \qquad \text{»}$$

Si può aggiungere che se n'p significa « numero primo complesso » si hanno le relazioni

$$\mathrm{Np} - \mathrm{n'p} = \mathrm{Np} \frown (\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2)$$
$$(2+\mathrm{N}) \frown \mathrm{Np} - \mathrm{n'p} = \mathrm{Np} \frown (4\,\mathrm{N}+1)$$
$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{n} . \mathrm{Np} \frown (a\,\mathrm{n}+b) = \mathrm{Np} - \mathrm{n'p} . =_{a,b} \Lambda$$

le quali esprimono tre proposizioni del lavoro.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Congrès de Caen - 1894

Première et deuxième Sections — Séance du 14 Août.

Question à l'ordre du jour.

Etude des moyens qui seraient de nature à assurer un échange de vues plus facile et plus suivi entre les mathématiciens des diverses nations, et qui pourraient contribuer ainsi aux progrès des sciences mathématiques et au perfectionnement des méthodes.

Résolution.

Les 1ère et 2e Sections, après une discussion approfondie, à laquelle ont pris part un grand nombre de membres,

1° — Donnent en principe l'adhésion la plus complète au projet de crèation de *Congrès mathématiques internationaux* et se déclarent dès-à-présent disposées à apporter tout leur concours aux efforts qui sont ou seront faits dans cet ordre d'idées;

2° — Approuvent absolument l'idée de M.r Mansion, relative à la rédation de *Vocabulaires mathématiques* et applaudissent au commencement de réalisation que M.r le Commandant Brocard a déjà donné à cette idée, par la préparation d'un vocabulaire mathématique français;

3° — Expriment l'espoir que le projet de M.r Iacques Boyer, concernant l'établissement d'un *Dictionnaire mathématique*, pourra aboutir à un heureux résultat, et en France, et dans la plupart des autres pays;

4° — Croient devoir attirer l'attention sur les remarquables monographies mathématiques qui se publient en ce moment en Allemagne, notamment par les soins du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematich*, fondé depuis 1868, et que dirige avec tant de talent Mr le

Professeur Dr E. Lampe, de Berlin; monographies dont il serait très désirable de voir publier des traductions dans diverses langues;

5° — Considèrent que les grands effort fait par Mr le Professeur Peano et plusieurs de ses Confrères pour la propagation de la *Logique mathématique* et la publication d'un *formulaire mathématique* sont de nature à contribuer puissamment au but qu'il s'agit d'atteindre;

6° — Sont heureuses de constater le degré d'avancement du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, et, dans le même ordre d'idées, applaudissent à la publication si intéressante due à un groupe de mathématiciens hollandais et entre autres de M.r P. H. Schoute, et qui est intitulée *Revue Semestrielle des Publications mathématiques:*

7° — Estiment que la publication de *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, depuis le commencement de 1894, a rendu et est appelée à rendre encore de très grand services, en ce qui concerne les rapports des mathématiciens entre eux; expriment leur reconnaissance aux fondateurs, MM. Laisant et Lemoine, et se félicitent de voir que cette initiative a été due à deux des membres de l'Association française pour l'avancement des Sciences;

8° — Prennent en très sèrieuse considèration les réflexions présentées par M.r Lémeray sur la possibilité d'établir des bibliothèques mathématiques, ayant pour objet de mettre des livres à la disposition des travailleurs éloignés des centres scientifiques;

9° — Décident que la question, sous la forme générale où elle a été rédigée, sera maintenue à l'ordre du jour des séances pour la session de Bordeaux en 1895.

Ces diverses résolutions ont été prises à l'umanimité des Membres présents.

Sulla Parte VII del Formulario - Teoria dei limiti.

In questa parte del formulario abbiamo esposto le proprietà dei limiti delle funzioni reali di variabili reali, presi quando la variabile indipendente percorre i valori di un gruppo tendendo al limite superiore infinito.

Abbiamo esaminato il concetto di limite (più vasto di quello ordinariamente considerato) di cui si hanno tracce in Cauchy, in Abel ed anche in autori anteriori, ma che si studia con una certa ampiezza solo da poco tempo: vogliamo dire il limite definito come un valore a cui si avvicina la funzione, senza escludere che contemporaneamente si avvicini anche ad altri. La definizione adottata è dunque la seguente: « Il numero y è limite della funzione $f(x)$ quando x nel gruppo u « tende al limite superiore infinito, se, scelto h comunque piccolo, « *qualunque sia il numero* a vi sono in u *alcuni* valori di x mag- « giori di a, pei quali $f(x)$ assume valori numericamente diversi da « y meno di h (*) » ed analoghe per il caso del limite $+\infty$ o $-\infty$.

Si ha così come caso particolare quello, più frequentemente studiato, in cui la funzione tende ad un unico limite; allora, riferendosi alla definizione precedente, « preso h comunque piccolo, *esiste un conve-* « *niente numero* a tale che per *tutti* i valori di x in u che sono « maggiori di a, $f(x)$ è numericamente diverso da y meno di h ».

A tale caso, come il più importante, si è dato naturalmente il maggiore sviluppo.

Dei limiti a cui tendono le funzioni quando la variabile indipendente si avvicina ad un valore finito x_0 od all'infinito negativo, non ci siamo occupati: invero le loro definizioni e le loro proprietà si deducono

(*) Cfr. Peano. *Sulla definizione del limite di una funzione* (Rivista di Matematica, vol. II). — Bettazzi. *Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo VI).

agevolmente da quelle citate nel formulario, colle rispettive trasformazioni di variabili $x = x_0 \pm \frac{1}{z}$, $x = -z$, mentre il riportarle tutte per disteso avrebbe allungato eccessivamente l'elenco delle formule senza portare un contributo di teoremi essenzialmente distinti.

Nel 1° dei quattro paragrafi di cui si compone questa VII parte si è data la definizione di limite finito ed infinito, e dei limiti si sono esposte le principali proprietà. Nè in questo paragrafo nè nei seguenti si vedranno registrate le notazioni storicamente importanti O ed U (in italiano S ed I) del Du Bois Reymond e dello Stolz, giacchè ad esse si può supplire, nella scrittura simbolica, colle espressioni $\max\lim fx$, $\min\lim fx$, o $\mathrm{l}'\lim fx$, $\mathrm{l}_1\lim fx$ senza introdurre simboli nuovi da definirsi.

Nel § 2 si è studiato il limite di una funzione, nel caso particolare (quello che si considera ordinariamente) in cui tale limite è unico.

Nel § 3 si sono date le proprietà dei limiti di più funzioni confrontati fra loro, e delle espressioni formate con più funzioni legate fra loro dalle operazioni elementari dell'Aritmetica.

Nel § 4 sono riportate alcune delle formule principali che esprimono equivalenze fra limiti di funzioni diverse, o valori già calcolati di limiti importanti. In questo paragrafo peraltro non si troveranno le numerose ed interessanti formule che, quali applicazioni dei limiti, si hanno dalle teorie delle serie, degli integrali definiti, ecc., dovendo esse costituire altre speciali parti del formulario.

È da notarsi che certe formule non sono state prese dalle opere che saranno citate via via (p. es. dall'opera del Laska) sotto le forme precise riportate nel formulario; giacchè essendosi in questo definito soltanto il limite preso quando x tende all'infinito, si sono dovute, con semplici cambiamenti di variabili, trasformare alcune formule date invece in quelle opere per il caso di x tendente ad un numero finito.

Di certe formule comunemente note e facili a trovarsi in quasi tutti i trattati di Algebra, non si è indicata la fonte a cui si sono tolte; di alcune non tolte a nessun'altra opera si è tralasciata la dimostrazione, perchè facilissima ed immediata.

Per brevità si è usata la notazione $x, y, z \ldots -\varepsilon\, a$ dove $x, y, z \ldots$ sono enti della classe a, invece dell'altra $x -\varepsilon\, a \,.\, y -\varepsilon\, a \,.\, z -\varepsilon\, a \ldots$

R. Bettazzi.

Sulla Parte VIII del Formulario. - Serie.

Nella Parte VIII del formulario son raccolte le formule principali risguardanti le serie ed i prodotti infiniti numerici: sono specialmente considerate le serie a termini positivi e, di esse, quelle a termini decrescenti, perchè le medesime sono della massima importanza nell'Analisi. Per la dimostrazione di alcune formule del § 1 è conveniente l'uso del calcolo simbolico; a questo fine osservo, p. es., che, se si pone:

$$(a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + \dots + a_m)(b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \dots + b_n) \text{ simb.} = a_0 b_0 u_{m+n} + \dots + a_m b_n$$

si ha:

$$\overline{\Sigma}^m u_{m+n} = u^n (u-1)^m \text{ simb.}$$

Alcune formule di esso § 1 coincidono sostanzialmente con note formule del calcolo delle differenze, perchè il segno $\overline{\Sigma}$ riducesi all'usuale Δ, essendo $\overline{\Sigma}^m u_{m+n} = \Delta^m u_n$: nonostante questa coincidenza ho creduto conveniente l'uso del $\overline{\Sigma}$ col preciso significato attribuitogli dalle generali leggi delle operazioni inverse, per le quali deve essere $\Sigma \overline{\Sigma} u_n = u_n$. Alcune proposizioni le ho date sotto varie forme per porne in chiaro i diversi aspetti sotto i quali può convenire di considerarle. I criterii relativi alle serie a termini positivi li ho ridotti a forma mirabilmente semplice e tale da segnare anche una via pel calcolo approssimato di somme, lasciandomi guidare da un notevole criterio ch'io ho segnalato [1]: ripensando al modo nel quale pervenni a tal criterio la prima volta, mi avvidi facilmente che la teoria delle serie a termini positivi ed il calcolo approssimato delle convergenti si possono ridurre allo studio della serie di Nicole; da questa serie, seguendo cammino inverso ad uno da me seguito [2], ricavasi infatti subito od il criterio di Kummer, che comprende tutti i criterii speciali per le serie a termini positivi, od altro equivalente; inoltre formare,

---

(1) Rend. Circ. Mat., a. 1890, pag. 278. — Rivista Mat., a. 1893, p. 120.
(2) *Giornale Battaglini*, a. 1890, pag. 303.

come indica KUMMER (¹) pel calcolo approssimato, una p_n tale da aversi $\lim (p_n u_n / u_{n+1} - p_{n+1}) = 1$ equivale a formare una serie di NICOLE

$$\frac{1}{1+p_1} + \frac{p_1}{(1+p_1)(1+p_2)} + \ldots + \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+1})} + \ldots$$

tale che il rapporto dei suoi termini n^{mo} ed $(n+1)^{mo}$ sia uguale, a meno d'un infinitesimo, ad u_n/u_{n+1}; ma quando una tal serie sia formata, siccome si conosce la somma d'un numero qualsiasi di termini della medesima, essendo

$$\frac{p_1 \ldots p_n p_{n+1}}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+1})(1+p_{n+2})} + \ldots + \frac{p_1 p_2 \ldots p_{n+m}}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+m+1})}$$
$$= \frac{p_1 p_2 \ldots p_{n+1}}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+1})} - \frac{p_1 p_2 \ldots p_{n+m+1}}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+m+1})},$$

si sarà in grado di calcolare approssimativamente (²) la somma della serie $u_1 + u_2 + \ldots$. Ciò, in vece di meravigliare, deve riescir naturale, perchè la serie di NICOLE comprende tutte le serie a termini positivi e perchè, come affermai altra volta (³), ogni criterio generale deve esser conseguenza di qualsiasi altro criterio, che sia anch'esso generale. Non credo però che quanto ora dissi tolga importanza ai lavori, che hanno contribuito a cospargere di luce la teoria delle serie a termini positivi, come non credo si possa disconoscere l'importanza dei miei risultati (§ 3 P54, 55, 58-64). Parmi invero difficile che si riesca a dare per le serie a termini positivi criterii generali più convenienti di quelli espressi con le 61 e 62 del § 3; e credo esser parimenti difficile indicare meglio che con le 63 e 64 una via pel calcolo approssimato delle serie convergenti. Passando ai criterii speciali, osserverò che i più importanti sono, essenzialmente, quello di condensazione di CAUCHY (§4 P4) ed i logaritmici di ABEL (§3 P48, 49): per stabilire questi ultimi ho indicata una via comodissima del Prof. CESÀRO (⁴), la quale ha anche il pregio di informare sul vario modo di divergere di molte serie. Ho date alcune importanti proposizioni per le serie a termini positivi decrescenti (§4 P9-13) e riempita una lacuna: ABEL (⁵) dimostrò erronea l'affermazione di OLIVIER, che $\lim nu_n$ fosse condizione necessaria e sufficiente per la convergenza delle serie a termini positivi $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

(¹) *Crelle's Journal*, XVI, a. 1837, pag. 206.
(²) Rend. Circ. Mat., a. 1890, pag. 280.
(³) » » » » » 279.
(⁴) *Nouvelles Annales*, IX, a. 1890. — *Analisi algebrica*, a. 1894, p. 133.
(⁵) ABEL. *Œuvres*, II, pag. 199.

e CATALAN [1] disse dover essere $\lim nu_n \log n \ldots \log^m n = 0$, se u_n sia termine generale d'una serie convergente a termini positivi decrescenti; anche questa proposizione è erronea [2]. Io provo dover essere $nu_n \log n \log^2 n \ldots \log^m n = 0$, se u_n sia termine generale di serie convergente a termini positivi e $nu_n \log n \ldots \log^{m-1} n$ sia decrescente: e parmi che poco si potrà aggiungere perchè una serie a termini positivi decrescenti può esser convergente anche se non è nullo il massimo limite del rapporto del suo termine n^{mo} ad $\dfrac{1}{n \log n}$, oppure al termine n^{mo} di una qualsiasi serie, che sia meno divergente di $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ [3]. La raccolta contiene anche formule nuove relative ai prodotti: ma le proposizioni sui prodotti si deducono facilmente da quelle sulle serie. Le formule storicamente più notevoli furono quasi tutte riportate fedelmente: solo si fece talora qualche cambiamento di lettere per ragione tipografica ed anche per evitare che le formule ravvicinate differissero eccessivamente tra loro nell'aspetto: furono pur soppresse condizioni non necessarie; p. es., al § 3, non trovansi le condizioni superflue $\lim v_n = 0$, per la P16, e $\lim v_n u_n = 0$, per la P52, che si trovano invece nelle corrispondenti proposizioni originali. Qualche proposizione, che può sembrare insignificante, s'è messa perchè utilizzabile in quistioni speciali; p. es. le P18, 19 del § 2 pongono in chiara luce l'effetto dell'alterazione dell'ordine dei termini nelle serie e dei fattori nei prodotti infiniti [4]. Qualche proposizione importante è data nelle varie forme, ugualmente convenienti, che ha successivamente ricevute, sebbene le medesime fossero immediatamente, ed in modo evidente, ricavabili l'una dall'altra: tali sono p. es. le P18, 19, 20, 21 del § 3. La P27 del § 2 coincide solo sostanzialmente con la originale, che è:

$$\psi_p = u_p \, \varphi_p \, . \, \lambda_p = \varphi_p - \varphi_{p+1} \frac{u_{p+1}}{u_p} \, . \supset . \, \psi_{p+1} = \psi_1 \, e^{\Sigma_1^p \log\left(1 - \frac{\lambda_p}{\varphi_p}\right)} .$$

Prima di finire voglio ancora rilevare che l'uso del massimo e minimo limite [5], e dei limiti superiore ed inferiore mi hanno permesso di dare alla maggior parte delle proposizioni un grado di perfezione, che prima non avevano.

F. GIUDICE.

---

[1] Comptes Rendus, a. 1856.

[2] PEANO. *Calcolo differenziale*, a 1884, pag. XVII.

[3] *Giornale Battaglini*, a. 1890, pag. 286.

[4] V. *Giornale Battaglini*, a. 1889, pag. 342.

[5] Il concetto di max lim. e di min lim. trovasi già in CAUCHY; *Analyse Algébrique*, pag. 132; ed in ABEL; *Œuvres*, II, pag. 198.

INDICE

Alcune espressioni risguardanti le serie e gli equivalenti simboli di logioa matematica.

Serie a termini positivi $. = .$ Q f N.
» » reali $. = .$ q f N.
» » imaginarii $. = .$ q′ f N.
Termine n^{mo} della serie u $. = .$ u_n.
Somma dei primi n termini della serie u $. = .$ $\Sigma\, u_n$.
Somma della serie u $. = .$ $\Sigma\, u_\infty$.
Resto n^{mo} della serie u $. = .$ $\Sigma\, u_\infty - \Sigma\, u_n$.
La serie u è convergente $. = .$ $\Sigma\, u_\infty\ \varepsilon\ \mathrm{q}'$.
» divergente $. = .$ $\Sigma\, u_\infty = \infty$.
La serie u è assolutamente convergente $. = .$ $\Sigma \operatorname{mod} u_\infty\ \varepsilon\ \mathrm{Q}$.
» semplicemente » $. = .$ $\Sigma\, u_\infty\ \varepsilon\ \mathrm{q}' . \Sigma \operatorname{mod} u_\infty = \infty$.
La serie u è indeterminata $. = .$ $\operatorname{num} \lim_{n=\infty} \Sigma\, u_n > 1$.
(*) La serie u è più divergente della serie v $. = .$ $\lim \dfrac{\Sigma\, u_n}{\Sigma\, v_n} = \infty$.
» » convergente » $. = .$ $\lim \dfrac{\Sigma\, u_\infty - \Sigma\, u_n}{\Sigma\, v_\infty - \Sigma\, v_n} = 0$.

(*) CESÀRO. Accademia dei Lincei, seduta 5 febbraio, 1888.

Hermann Grassmanns

Gesammelte mathematische und physicalische Werke

Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, und unter Mitwirkung der Herren: Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. Ersten Bandes erster Theil, Leipzig, Teubner 1894, pag. XII+435, prezzo 12 Marchi.

L'annunzio della pubblicazione delle opere complete di Grassmann, sotto il patrocinio dell'Accademia delle Scienze di Sassonia; fu accolto con piacere da tutti i matematici, e specialmente da coloro che si propongono di perfezionare i metodi geometrici.

La Geometria analitica cartesiana fu certo un grande progresso. Ma da lungo tempo si osservò che essa tratta le questioni geometriche per via indiretta, e spesso con lunghi ragionamenti e formule complicate arriva a risultati facilissimi ad ottenersi colla geometria sintetica elementare. Questa osservazione trovasi a più riprese nelle opere di Leibniz, il quale anzi tentò colla sua *characteristica geometrica* di porvi rimedio. « Je ne suis pas encor content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geométrique ou lineaire, qui nous exprime directement *situm,* comme l'Algèbre exprime *magnitudinem.* » (*).

Ma questa, come altre idee di Leibniz, impiegò assai tempo a maturare; e il lavoro più profondo che abbiasi su questo soggetto è senza dubbio l'*Ausdehnungslehre* pubblicato dal Grassmann or sono appunto cinquant'anni. Quantunque l'opera del Grassmann sia del tutto

(*) Leibniz a Huygens, 8 sett. 1679.

originale, alcune sue idee si trovano in libri anteriori. Le forme di prima specie, o somme di punti, spettano al Möbius. L'idea di vettore, la loro somma e il loro prodotto per numeri immaginarii al Bellavitis. Lo stesso prodotto esterno di due vettori (bivettore) è stato studiato qualche anno prima dal De Saint Venant, e prima ancora dal nostro Chelini. Spetta al Grassmann il merito di avere studiato un sistema generalissimo ed organico di operazioni comprendenti come caso particolare le precedenti.

Ma, se i sistemi di calcolo geometrico che precedettero Grassmann si diffusero poco, meno ancora si diffuse il metodo suo. Durante la vita del professore ginnasiale di Stettin, nessuno se ne occupò, se si eccettua qualche voce isolata sorta nell'ultimo decennio della sua vita. E invero la sua tendenza all'astrazione, il suo modo filosofico di presentare le questioni, la sua forma espositiva insomma, rendono la lettura della sua opera assai difficile e penosa.

Più fortunato fu il suo successore Hamilton. La sua idea dei quaternioni è del tutto originale; ma i calcoli relativi finiscono per coincidere con quelli del Grassmann, con qualche varietà di notazione. Così nelle applicazioni alla fisica, il prodotto di due vettori, secondo Hamilton, figura solamente ora per la sua parte scalare, ed ora per la sua parte vettoriale; la prima è il prodotto interno (a meno del segno), e la seconda il prodotto esterno dei vettori, secondo Grassmann. L'Hamilton brilla anche per la sua bella espositiva, ed i suoi metodi si diffusero con sufficiente rapidità; un numero grandissimo di autori li applicò a tante questioni di Geometria, di Meccanica e di Fisica matematica. È specialmente nella teoria dell'Elettricità e del Magnetismo che essi paiono fatti apposta per rappresentare nel modo più chiaro e semplice i fenomeni fisici.

Ma, secondo parecchie persone che conoscono i due metodi, e tale è pure la mia opinione, a tutti gli usi cui si prestano i quaternioni di Hamilton, si presta pure il metodo di Grassmann, e coi vantaggi della più grande generalità e semplicità dei concetti fondamentali, e della maggiore brevità delle notazioni. Al giorno d'oggi i metodi di Grassmann vanno sempre più rapidamente diffondendosi, e non passa mese che non si pubblichi una qualche opera o nota, o qualche nuova applicazione. Alcune delle idee di Grassmann, quale il prodotto interno, furono poi ritrovate, indipendentemente da lui, da autori di Meccanica.

Però la diffusione di questi nuovi metodi, atti a trattare per via più semplice e intuitiva le questioni di Geometria, di Meccanica, di Fisica matematica, è meno rapida di quanto si desidererebbe da chi ama i progressi della scienza. La ragione sta in ciò che per ben giudicare di siffatti metodi, occorre esserne del tutto padroni, e di averli appli-

cati in più occasioni; o come mi diceva un mio valente insegnante, questi metodi sono come un nuovo strumento messo in mano ad un operaio; se l'operaio usò per lungo tempo della sua vita un dato strumento, se ne rende così facile il maneggio, che gli riesce preferibile ad uno strumento più perfezionato, ma nuovo, col quale debba ancora impratichirsi. Alle nuove generazioni spetterà l'uso di questi strumenti più perfezionati.

Intanto l'edizione completa delle opere di Grassmann non mancherà di far conoscere meglio i suoi metodi; e molti che si limitarono finora a nominarlo con un certo rispetto, vorranno penetrare più addentro nelle sue opere. Questa edizione era tanto più desiderata, inquantochè la sua *Ausdehnungslehre* del 1862 era da tempo esaurita; e difficile riusciva la ricerca di altri suoi scritti disseminati in varii periodici scientifici.

Il primo impulso a questa edizione fu dato dal prof. F. Klein nel 1892, in una seduta dell'Accademia delle Scienze di Lipzia; e la sua pubblicazione fu promossa da quest'Accademia, dall'editore Teubner, dalla famiglia Grassmann, e dai vari scienziati, il cui nome figura nel frontispizio, e che si assunsero la redazione delle varie parti dell'opera. Il volume ora uscito (1^a parte del 1^o volume), contiene l'*Ausdehnungslehre* del 1844, colle aggiunte della seconda edizione del 1878; e la *Geometrische Analyse*, del 1846. Contiene inoltre prefazione, osservazioni ed indice dell'editore, ed il ritratto del Grassmann. La seconda parte del 1^o volume che contiene l'*Ausdehnungslehre* del 1862, sarà possibilmente publicata in principio del venturo anno. Gli altri volumi non tarderanno a comparire.

Possa questa nuova edizione delle opere di Grassmann, servire a meglio far conoscere e stimare i servizii ch'egli rese alla Matematica.

G. Peano.

Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga.

di Gino Fano.

Di ritorno dall'aver passati alcuni mesi in Germania all'Università di Gottinga, che occupa certamente, fra tutte quelle tedesche, uno dei primissimi posti, ho pensato che non sarà forse discaro ai lettori della *Rivista* di avere qualche notizia sugli insegnamenti che vi si impartiscono, e sulle usanze e consuetudini che sono quivi in vigore. E se qualcuno di essi avesse effettivamente un tal desiderio, io sarò ben lieto se colle pagine che seguono avrò contribuito a soddisfarlo.

Nelle Università tedesche l'insegnamento della matematica (e non solo di questa, ma anche di ogni altra disciplina) si informa soprattutto alla famosa « akademische Freiheit », della quale professori e studenti vanno tanto alteri. — Questa libertà d'insegnamento e di studio, che permette all'insegnante di scegliersi entro limiti certo assai ampi l'argomento delle sue lezioni, e allo studente di inscriversi, dentro e fuori della Facoltà cui appartiene, a quei corsi che più gli piacciono o l'interessano, non si ritrova certo, così completa almeno, in nessun altro paese del mondo; non in Italia, non in Francia, non in Inghilterra; qualche traccia appena ne ritroviamo negli Stati del Nord (Danimarca, Svezia e Norvegia); e perfino nella libera America non si è fatto che un primo passo in questa via nell'Università recentemente aperta a Chicago. Per quanto più specialmente si riferisce all'insegnamento della matematica, la *akademische Lehrfreiheit* ha per conseguenza che non si nominano professori di algebra o di geometria projettiva, di calcolo infinitesimale, di analisi o di geometria superiore, ma semplicemente professori di *matematica*, ciascuno dei quali va svolgendo di semestre in semestre quegli argomenti che le sue speciali tendenze e ricerche, talvolta anche i desiderî degli studenti che alle sue lezioni assistono, oppure altre circostanze qualsiansi, più gli consigliano [1]. I corsi tenuti in un semestre qualunque si continuano forse,

---

[1] E i diversi professori non vengono nemmeno nominati, come da noi, per concorso. Le Facoltà stesse, quando vi rimane un posto vacante, invitano

ma certo non si rifanno nel semestre successivo; potranno però ripetersi (e si capisce) dopo un periodo più o meno lungo, per cura dello stesso insegnante o di qualche altro.

Da questo lato noi siamo dunque colle Università tedesche, in piena opposizione. Quale dei due sistemi sia il migliore, io francamente non mi sento di dirlo. Probabilmente da una parte e dall'altra vi sono vantaggi e inconvenienti. Sono certo immensi i vantaggi del sistema in uso nelle Università tedesche, sistema che permette di evitare molti guai, fra noi continuamente lamentati. Ma anche il sistema tedesco ha i suoi inconvenienti, e per quanto a Gottinga soprattutto si sia fatto e si faccia tutto il possibile per rimediarvi, non mi pare tuttavia che si sia ancora riesciti a porvi riparo completo.

In primo luogo è chiaro che con un campo così vasto, e anzi sempre più vasto, dal quale i singoli insegnanti, a volte anche non troppo numerosi, devono trarre l'argomento delle loro lezioni, non sarà sempre possibile, o almeno non sarà facile dare nella scelta la dovuta importanza ai corsi elementari, basi di ogni altro insegnamento, e ripetere questi stessi corsi in modo che sempre agli studenti sia dato di assistervi fin dal principio dei loro studi. La divisione dell'anno in due semestri, e la possibilità di avere nell'uno e nell'altro dei due studenti nuovi del tutto allo studio della matematica, rendono questa difficoltà ancor maggiore. A questo inconveniente gravissimo si cerca dapertutto di ovviare il meglio possibile; spesso si invitano o si incaricano i liberi docenti o i professori più giovani di tenere corsi elementari, e a Gottinga si è stabilito anzi in questo senso un certo qual turno fra i diversi insegnanti. Così nel semestre invernale 1893-94 si ebbe un corso di *Calcolo differenziale* e uno di *Geometria projettiva*, e al primo fece seguito nel semestre estivo quello di *Calcolo integrale*, mentre nello stesso tempo il prof. WEBER dava principio a un corso di « *Einleitung*

---

direttamente il tale o il tal altro a venirlo a coprire. È in ciò principalmente che si esplica la pur limitata autonomia amministrativa delle Università tedesche; autonomia limitata, in quanto che il *Kurator* o cancelliere (rappresentante del Governo) vi esercita un vero e proprio ufficio di sorveglianza su tutta quanta la gestione economica, ma alla quale le Università stesse hanno pur sempre un certo diritto, poichè, almeno in parte, vivono di redditi propri. E di questo diritto appunto esse si valgono per aumentare, quando sia il caso, gli stipendi dei professori, e chiamare a sè o trattenere i più insigni. Va da sè che un invito (*Ruf*) ad altra Università (la quale offra, come sempre avviene, condizioni migliori) richiede in generale un aumento di stipendio per parte dell'Università minacciata, perchè il professore rimanga.

in die höhere Mathematik », corso che verrà continuato nell'inverno prossimo, e nel quale vengono esposti gli elementi della geometria analitica e del calcolo infinitesimale, ma collo scopo precipuo (e conviene notarlo) di darne un'idea non tanto agli studenti di matematica, quanto a quelli di chimica e di scienze naturali, che più non possono (o non dovrebbero) oggigiorno restare del tutto estranei agli studi matematici. Ma la seconda parte di questo corso non potrà esser seguita con profitto — e si capisce — da chi non ha assistito alla prima, e fra gli altri corsi annunciati per l'inverno 1894-95 solo quello di geometria descrittiva sarà adattato ai nuovi studenti (1). E per quanto nei primi semestri sia molto consigliato lo studio delle materie complementari (*Nebenfächer*), sarebbe tuttavia desiderabile che uno studente di matematica potesse assistere già nel primo semestre a qualche corso principale oltre la geometria descrittiva, alla quale il più delle volte egli non sarà nemmeno del tutto nuovo.

In Italia questo inconveniente non può presentarsi. I corsi elementari — che sono in sostanza quelli stessi prescritti per il conseguimento della licenza in scienze fisico-matematiche (2) — vengono tenuti regolarmente ogni anno, e comprendono sempre, su per giù, le stesse cose fondamentali. In Francia questi stessi insegnamenti vengono già dati nel corso di *Mathématiques spéciales*, una delle tante suddivisioni delle ultime classi del Ginnasio. In Danimarca (ossia a Kopenhagen) gli studenti li ricevono nella Scuola Politecnica, dove si trattengono due o tre anni, e solo dopo cominciano a seguire i corsi universitari. E una parte importantissima hanno i corsi elementari anche nelle diverse Università degli Stati Uniti d'America (cfr. ad es. gli Annuari delle Università di *Wisconsin*, *California*, ecc.).

*
* *

Ma c'è anche un altro inconveniente, che può diventar grave (3). In mezzo a tanti corsi, e tanto svariati, non è facile orizzontarsi, e tanto più difficile è questo per lo studente novello, il quale a mala pena

---

(1) Il prof. SCHÖNFLIES terrà però anche un corso di algebra, più o meno elevato secondo gli studenti che si presenteranno per seguirlo.

(2) Più, forse, la meccanica razionale.

(3) Potrebbe forse sembrare a prima vista che, colla libertà lasciata ai diversi professori, si avesse anche a deplorare nell'insegnamento sia la mancanza di un'unità di indirizzo, sia uno qualunque dei tanti inconvenienti, che potrebbero appunto provenire dal non essere i diversi insegnamenti

saprà (e forse nemmen tanto) che il corso di calcolo infinitesimale deve esser seguìto ad es. prima di quello di meccanica, sia pur elementare, e quello di geom. analitica prima di uno sulla teoria generale delle curve e superficie. Va bene che tutti gli insegnanti sono sempre prontissimi ad aiutare i giovani coi loro consigli e a dirigerli nella scelta dei corsi, ma non tutti i giovani hanno il coraggio o quel tanto di iniziativa che occorre per rivolgersi a loro, e alcuni, molti anzi, si contentano a volte di escire dall'imbarazzo come meglio possono, da soli (1), o coll'aiuto di qualche studente più anziano sì, ma che potrà anche dar loro per inesperienza dei consigli assai poco opportuni (2). E se a quest'incertezza in cui ogni studente deve trovarsi da principio (e a volte anche più tardi) aggiungiamo la mancanza, talora, di certi corsi elementari, e l'abitudine degli studenti tedeschi (che potrà anche avere il suo lato buono) di cambiare ogni momento di Università, non potremo certo meravigliarci di trovare a volte studenti che parlano, e anche con cognizione di causa, di funzioni più o meno trascendenti e di equazioni differenziali, mentre d'altra parte non sanno che esista un teorema di Cartesio per le equazioni algebriche, e non sono capaci di tener dietro ai più semplici ragionamenti di geometria projettiva!

Per rimediare a quest'inconveniente gravissimo i professori dell'Università di Gottinga hanno compilato e pubblicato uno *Studienplan*, che viene distribuito man mano a tutti i nuovi studenti, e che si cerca anzi di diffondere dovunque il più possibile. Lo scopo di questo *Studienplan* è definito nettamente dalle sue prime parole:

« *Wir geben den Herrn Commilitonen, die sich für das höhere*

---

fra loro coordinati. Ma, a Gottinga almeno, i vari corsi vengon sempre stabiliti, semestre per semestre, di comune accordo fra i diversi insegnanti, che si riuniscono a tale scopo, in tempo debito, in apposita seduta; sicchè da questo lato — salvo quel po' che è detto sopra a proposito dei corsi elementari — non vi sono certo inconvenienti da lamentare.

(1) Val la pena di riferire una risposta che ebbi a questo proposito da un giovane studente, che non era neppure dei meno intelligenti: « Comincio « a andare a parecchi corsi; dove capisco, mi fermo; dove non capisco, « smetto ».

(2) Questa difficoltà diventa poi maggiore, e anzi addirittura enorme, nelle Università più grandi, dove da un lato i corsi sono in molto maggior numero (come p. e. a Berlino, dove per l'estate scorso erano annunciati ben 19 corsi di matematica, senza contare quelli di astronomia, meccanica e fisica matematica), e d'altra parte anche le relazioni personali cogli insegnanti diventano assai più difficili.

« *Lehramt in Mathematik und Physik vorbereiten wollen, einen Weg-*
« *weiser durch das weite Gebiet dieser Wissenschaften, dem sie während*
« *ihrer Studienzeit folgen können. — Es ist nicht die Absicht, einen*
« *genauen Studienplan zu entwerfen,...* » ma solo di dare « *einen*
« *Ueberblick über die Gesammtheit der Fächern, die im Laufe einiger*
« *Semester in den Vorlesungen der hiesigen Universität vorgetragen*
« *werden...* »

Con questo *Studienplan* il compito di ogni studente rimane molto facilitato, e l'imbarazzo in cui esso può trovarsi da principio molto diminuito. Certo che qualche difficoltà rimane sempre, e non si può davvero meravigliarsi, se a volte il fatto solo di un corso annunciato sotto un nome diverso basta a sconvolgere un po' le idee di qualche studentino; ma con tutto ciò lo *Studienplan* dell'Università di Gottinga è sempre un lavoro assai utile ed accurato, del quale val la pena di discorrere un po' più a lungo.

*
* *

In una breve introduzione allo *Studienplan* si dànno alcune avvertenze generali, e fra le altre si raccomanda ai futuri insegnanti di scuole secondarie (e sono i più!) di non perder d'occhio questa loro missione avvenire, e di ben notare l'importanza delle odierne scienze esatte per la cultura generale da un lato, e per la luce che da un altro lato anche questioni elevate possono gettare su questioni elementari, che direttamente interessano il professore di Ginnasio. — Viene poi una prima parte, o parte generale, nella quale si discorre dei corsi elementari, della necessità di ritornare da sè sulle lezioni udite e di rivedere con cura gli appunti presi, del numero dei corsi a cui in ogni semestre si può o conviene assistere, dei corsi complementari, dei seminari ed esercitazioni pratiche, e infine anche della necessità di completare da sè la propria cultura, soprattutto colla lettura attenta di opere originali. La seconda parte tratta dei *corsi,* che vengono divisi in tre categorie: Corsi elementari (*Anfangsvorlesungen*) che vengono tenuti — o almeno dovrebbero esserlo — ogni anno; corsi più elevati, di carattere generale (*allgemeine Vorlesungen*), che si ripetono ogni due o tre anni, e corsi speciali (*Specialvorlesungen*), che mutano secondo lo stato della scienza e le tendenze personali dei diversi insegnanti, sicchè non è possibile stabilire per essi un turno determinato.

Come corsi elementari sono notati: *Geometria analitica, Calcolo differenziale e integrale,* e *Meccanica;* più la *Einleitung in die höhere Mathematik,* della quale ho già discorso.

Come *allgemeine Vorlesungen* sono notati invece, con brevi illu-

strazioni, i corsi seguenti: *Algebra, Teoria dei numeri reali e complessi, Geometria projettiva e descrittiva* [1], *Geometria infinitesimale, calcolo integrale* (nelle sue parti più elevate), *Teoria delle funzioni, Meccanica superiore* (e particolarmente *Teoria di Hamilton*), *Teoria del potenziale, Equazioni alle derivate parziali*, diversi corsi di fisica matematica (*elettricità, ottica, acustica,...*), *astronomia generale, calcolo delle probabilità*. A questi sarebbero ancora da aggiungere i corsi compresi sotto il nome di *Enciclopaedy der Elementarmathematik*, i quali avrebbero appunto lo scopo di gettar luce da un punto di vista alquanto più elevato su questioni di matematica elementare [2].

Quanto infine ai corsi *speciali*, ne sono dati diversi esempi, tolti fra quelli tenuti negli ultimi semestri, sia nel campo dell'Algebra (*Teoria degli invarianti, numeri algebrici*), sia in quello della Geometria, della Teoria delle funzioni, dell'Astronomia, della Fisica matematica. — Poche parole sono poi ancora dedicate ai corsi complementari, e in particolare alle *philosophische* e alle *naturwissenschaftliche und geographische Vorlesungen*, che mentre da un lato servono di complemento agli studi matematici propriamente detti, dall'altra formano anche parte importantissima della cultura generale [3].

***

Da queste poche notizie non sarà difficile rilevare che fin dai corsi elementari si manifestano in Germania, nell'insegnamento della matematica, abitudini e tendenze alquanto diverse dalle nostre. Molto ci

---

(1) Ogni due o tre anni soltanto dunque il corso di Geometria projettiva; e così quello di Algebra, ecc.

(2) A questo gruppo di corsi apparterrebbe precisamente quello tenuto nell'estate scorso dal prof. KLEIN sotto il titolo: *Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*. In questo corso furono trattate alcune questioni sulla possibilità o meno di eseguire determinate costruzioni geometriche (raddoppiamento del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del circolo) con determinati mezzi. Le questioni proposte si traducono, com'è noto, in determinati problemi analitici, e così p. e. il caso in cui si disponga, come generalmente avviene, della sola riga e compasso, conduce a discorrere della risoluzione di certe equazioni per radicali quadratici. Ma costruzioni che colla sola riga e compasso non si possono ancora eseguire, diventano invece possibili quando si disponga di mezzi più elevati, e lo stesso numero π (che HERMITE e LINDEMANN dimostrarono non essere algebrico) si può oggi *costruire* coll'*integrafo* di ABDANK ABAKANOWICZ.

(3) Per la parte relativa ai *Seminari*, cfr. più avanti.

sarebbe da discorrere su questo argomento; ma io mi limiterò a far qui notare una cosa sola. Da noi è parte importantissima dell'insegnamento elementare (ossia del primo biennio) la *Geometria projettiva,* la quale assai di spesso, forse anzi sempre, viene studiata già nel primo anno di corso. E si può quasi dire che è questa (insieme alla Geometria analitica, colla quale anzi in certe Università forma — ed è bene assai! — un corso solo) la materia, sulla quale si concentrano quasi tutti gli sforzi del primo anno. L'Algebra non è (in molte parti almeno) che la continuazione naturale (a volte anche la ripetizione) di quanto i giovani hanno già appreso nei Licei e negli Istituti Tecnici, e il calcolo infinitesimale viene quasi sempre rimandato al secondo anno. — In Germania invece si mettono gli studenti novelli subito alle prese col calcolo; si insegna loro fors'anche nello stesso tempo (e senza troppo insistervi) un po' di geometria analitica, e la geometria projettiva, soprattutto se trattata sinteticamente, la si rimanda a più tardi, salvo poi non occuparsene affatto o quasi, se intanto lo studente acquista, come spesso avviene, un sacro orrore per tutto ciò che sa anche solo lontanamente di geometria, invece di essere pura e purissima analisi. — Da questo lato dunque le consuetudini italiane mi sembrano forse preferibili. La geometria projettiva mi sembra ottima ginastica della mente, e offre anche ai giovani un numero grandissimo di questioni facili e pur interessanti, che sono assai atte a infondere in essi l'amore alla scienza. Invece il calcolo infinitesimale è materia forse più astrusa, e sarà meglio e più facilmente gustata da giovani che hanno già compiuto un anno di studio nelle Università, senza tener conto poi dell'opportunità di conoscere già prima, e a fondo, gli elementi della geometria analitica, piuttosto che andarseli studiando, più o meno in fretta, man mano che occorrono o che si rendono utili nelle applicazioni (1).

*
* *

D'altra parte però è innegabile che la *Lern-und Lehrfreiheit* delle Università tedesche offre dei vantaggi grandissimi, dei quali a chiunque

---

(1) Lo studio sollecito del calcolo infinitesimale è richiesto però in Germania da una ragione che per noi non sussiste. Per l'esame di Stato, che spesso viene dato dopo circa otto semestri di studio, si richiedono delle cognizioni di fisica matematica molto superiori a quelle che gli studenti acquistano di solito nelle nostre Università, dove in un anno solo ben pochi argomenti possono venir trattati. E i diversi corsi che a tal uopo devono venir seguiti richiedono tutti, naturalmente, che i giovani ne abbiano già seguito prima uno di meccanica, e prima ancora, quindi, di calcolo infinitesimale. Da ciò la necessità di cominciare presto cogli elementi di quest'ultimo.

sarà facile rendersi ragione. È in questo modo che l'insegnante può condurre davvero i giovani nelle regioni più elevate della scienza, e particolarmente in quelle che a lui sono più famigliari, continuando di semestre in semestre un dato corso o gruppo di corsi, tendente a mettere in luce un dato capitolo o ramo di scienza. È così ad es. che l'illustre KLEIN colle sue lezioni sulla *Geometria non euclidea* (1889-90), sulle *Superficie di Riemann* (1891-92), sulle *Equazioni differenziali lineari* (1890-91 e 1893-94), in parte anche colla *Höhere Geometrie II* (1893), e infine colla *Zahlentheorie* del prossimo semestre invernale, va facendo luce nel campo, assai oscuro da principio, ma che si va ora man mano rischiarando, delle FUNZIONI AUTOMORFE.

Riassumendo, la differenza fra l'insegnamento italiano e quello tedesco si può forse caratterizzare (in tesi generale) così: In Italia si dànno agli studenti di matematica delle ottime basi, ma appunto perchè a queste si pone ogni cura (e un po' anche per altre ragioni) manca di solito il tempo di condurre i giovani molto avanti nella scienza, e non sono frequenti i casi in cui nei corsi di analisi, di geometria, di meccanica superiore, o in quello di fisica matematica si può esporre qualche capitolo di scienza un po' elevato. In Germania invece si sorvola spesso sulle basi (e più specialmente su certe parti di queste), e si lascia quasi agli studenti di buona volontà la cura di completarsele, ma si ha così anche il modo di condurre chi ha potuto e saputo procurarsi queste basi molto più avanti (in certi campi almeno) di quanto da noi avviene.

L'uno e l'altro dei due sistemi ha i suoi lati buoni. Ma non sarebbe possibile, conservando pur com'è, o quasi, il nostro primo biennio, riordinare il secondo in un modo analogo a quello ch'è in uso nelle Università tedesche, e con idee quindi che riescirebbero certo più conformi alle esigenze della scienza moderna? — La questione viene qui anche a collegarsi strettamente con quella vecchia e tanto dibattuta degli *esami*.

***

Nelle Università tedesche non si dànno esami speciali sui singoli corsi, come avviene da noi, e un tal sistema sarebbe infatti assolutamente incompatibile col modo in cui l'insegnamento viene impartito. Colla libertà che ad ogni insegnante è lasciata nella scelta dell'argomento delle sue lezioni, non si potrebbe prescrivere tutt'al più che un *numero minimo* di esami speciali, e anche questa sarebbe una prescrizione senza alcun valore pratico e affatto insufficiente come garanzia delle cognizioni acquistate e della diligenza dimostrata dai vari studenti. Tutto è riposto quindi negli *esami di Stato,* i quali aprono la via, secondo i casi, all'insegnamento o all'esercizio delle diverse professioni.

Per quanto si riferisce in particolare agli studi fisico-matematici, l'esame di Stato è un *primo passo* verso l'idoneità all'insegnamento nelle scuole secondarie (*Gymnasien. Realgymnasien, Realschulen*); dico *un primo passo*, perchè, superato anche l'esame, occorre pur sempre un anno almeno di tirocinio, prima di poter essere inscritti nell'elenco degli aspiranti a un tale insegnamento. I posti che si vanno man mano rendendo vacanti vengon poi dati ai diversi *candidati*, per ordine di anzianità. In Prussia quest'elenco è tenuto anzi separatamente per ciascuna delle diverse provincie; ma da qualche anno in qua può anche esservi inscritto chi abbia dato l'esame in un'Università non Prussiana, purchè sia egli stesso Prussiano di nascita. All'esame di Stato i giovani possono presentarsi (in Prussia almeno) dopo sei semestri di studio; ma è ben raro il caso che qualcuno vi si presenti prima dell'ottavo semestre. Gli esami sono scritti e orali. I primi consistono in un certo numero di lavori scritti, su temi assegnati, per svolgere i quali si lascia del tempo parecchio. I secondi comprendono materie principali (ad es. matematica e fisica), materie secondarie (scienze naturali) e cultura generale (storia della letteratura, filosofia, religione); in tutto otto o nove materie, sicchè il lavoro di preparazione riesce sempre assai faticoso.

Ben distinta dall'esame di Stato è invece la *laurea*, la quale conferisce il titolo, puramente onorifico, di *doctor*, colla qualifica della Facoltà in cui questo titolo è stato conseguito; secondo i casi dunque, *doct. theol.*, *doct. med.*, *doct. jur.* o *doct. phil.* Quest'ultima laurea corrisponde da sola alle nostre in lettere e in filosofia, in matematica, fisica, chimica e scienze naturali, essendo i relativi insegnamenti tutti compresi nella *philosophische Facultät.* Per questa laurea si richiede come da noi una dissertazione scritta su argomento di libera scelta, e un esame orale. Per quanto si riferisce alla dissertazione, è forse difficile dire, in tesi generale, quali siano le esigenze, tanto più che queste possono anche variare a seconda degli insegnanti e delle Università; tutto sommato però, credo non ingannarmi dicendo che si richiede qualcosa di più che non da noi [1] [2].

---

[1] E ciò è provato indirettamente anche da una disposizione, la quale prescrive che tutte le dissertazioni di Laurea siano date alla stampa.

[2] La distinzione fra *Laurea* ed *esame di Stato* è comune anzi, come ho detto, a tutte le Facoltà. Così p. e. nella Facoltà medica l'esame di Stato conferisce il titolo di *approbirter Arzt*, ossia *medico* nel vero senso della parola, e la laurea quello di *doct. med.*, ossia *dottore in medicina.* Si può dunque esser medico senza esser dottore in medicina, e viceversa. — Nella Facoltà medica l'esâme di Stato si divide però in tre parti, che vengon date successivamente in epoche diverse, e vertono anche rispettivamente su diversi gruppi di materie.

Un riordinamento del nostro secondo biennio di matematica nel senso accennato poc'anzi, come l'ebbe anche a propugnare in questa stessa *Rivista,* circa un anno fa, l'Egr. Prof. PASCAL [1], porterebbe come conseguenza necessaria l'abolizione degli esami speciali del 3° e 4° anno, e l'introduzione di una specie di esame di Stato, che abilitasse all'insegnamento nelle scuole secondarie. Ma questa seconda riforma, come lo stesso Prof. PASCAL ha giustamente osservato, completerebbe la prima nel modo più opportuno, e ciò anche per parecchie altre ragioni, sulle quali sorvolo, rinviando il lettore all'articolo citato del Prof. PASCAL. — Ma anche un altro vantaggio ci sarebbe dato in questo modo di raggiungere; si potrebbe cioè tenere la Laurea in Matematica, come cosa indipendente dall'esame di Stato, a un livello molto più alto di quello che oggi non sia. Non vi è nessun paese del mondo dove una Laurea (e specialmente una Laurea in matematica) si acquisti così *a buon mercato* come in Italia. Per non parlare della Germania, mi basti dire che in Francia si *laureano* soltanto persone di una certa età, le quali abbiano presentato un lavoro di vera e indiscussa importanza scientifica, e a prova di questo sta il fatto che nella Facoltà di Parigi le Lauree in matematica non furono in tutto il ventennio 1871-90 che circa *ottanta* [2]. In Inghilterra la Laurea è anche un titolo onorifico, non facile a conseguirsi; in Danimarca e in Svezia essa abilita senz'altro alla libera docenza, ed esige perciò nel candidato requisiti corrispondentemente superiori. E infine nella maggior parte delle Università Americane il titolo di *Doctor of Philosophy* [3] non è che un *Third degree,* mentre il *first degree,* per il quale si richiedono pure, come da noi, quattro anni di studio, non conferisce che il titolo di *Bachelor* (bacceliere) *of Arts, of Science, of Letters,* e in mezzo ai due sta ancora il *Second degree,* cioè il *Master of Arts (Magister artium),* o anche *of Letters,* o *of Science.* Soprattutto sarebbe bene che la *Laurea* fosse qualcosa di diverso da un complemento *necessario* e spesso *immediato* di un determinato corso di studi (e tale è proprio sgraziatamente da noi! [4]); e a questo proposito mi piace anzi ripor-

---

(1) Cfr. questa *Rivista;* vol. III (1893): p. 170-179.

(2) E forse una mezza dozzina nelle provincie! Questo mostra pure come tutto il movimento, anche scientifico, della Francia tenda a concentrarsi in quella gran capitale!

(3) Questo nome unico dato anche qui a una Laurea, che corrisponde da sola a parecchie fra le nostre, non mi sembra certo costituire una differenza sostanziale.

(4) E la dissertazione richiesta, per la quale non si hanno a volte che esigenze assai limitate, non muta certo sensibilmente lo stato di cose. Un

tare le parole seguenti, lette sul *Catalogue of the University of Wisconsin* (1893-94).

This degree (Doctor of Philosophy) will not, however, be conferred simply on the ground of the completion of study for the prescribed length of time. Special attainments are requisite; particularly the power of original thought and indipendent investigation..... A thesis must be presented, which shall give evidence of original research and indipendent treatment...

Parole veramente sagge e assennate. E io vorrei davvero augurarmi che presto la si pensasse così anche in Italia!...

* * *

Ma c'è anche un altro punto, relativo all'insegnamento della matematica in genere, del quale voglio far cenno, sia pur brevemente.

Nelle Università si trattano oggigiorno le più alte questioni scientifiche, e si discutono a volte anche problemi che segnano l'estremo limite al quale la scienza per il momento è giunta. Ma a lato delle Università propriamente dette (o meglio delle Facoltà di Scienze) vi sono altri Istituti d'Istruzione Superiore, gli Istituti Tecnici Superiori (Scuole d'Applicazione per gli Ingegneri), nei quali lo studio della scienza pura non è certo spinto tanto innanzi, ma si dà invece la preferenza a quei problemi speciali, che più direttamente interessano i bisogni della vita pratica. E, non più a fianco, ma solo un gradino più in basso delle Università stanno anche gli Istituti, troppo spesso dimenticati, d'istruzione secondaria, nei quali altri ingegni, meno in vista forse, ma non per questo a volte meno benemeriti, sudano a dirozzare forse ancora quelle menti che, salito poi l'ultimo gradino, andranno a ricevere negli Istituti Superiori il pane della scienza, pura o applicata. Or bene, a chi le stà a fianco e a chi a breve distanza la segue, sempre conviene che l'Università stenda le braccia per reciproco aiuto; *reciproco*, in quanto che, da una parte e dall'altra, sempre vi sarà da guadagnare.

In primo luogo, per far progredire la scienza, bisogna risolvere dei problemi; e per quanto di questi ultimi non ve ne siano mai troppo pochi, non sarà male ricordare che la maggior parte di essi ci vennero dati e ci vengon proposti tuttora dalle diverse scienze applicate [1] e

---

lavoro particolare (*thesis*) si richiede del resto anche per il conseguimento del titolo di *Bachelor*.

[1] E fra queste sarebbe naturalmente prima la *fisica*. Diceva appunto il Klein, che ciò che è importante per la fisica lo è quasi sempre anche per la matematica; *e viceversa!*

dai bisogni della vita pratica. Da ciò dunque la necessità, o almeno la somma convenienza per gli Istituti destinati anche a far progredire la sola scienza pura, di tenersi continuamente a contatto di quegli altri, nei quali le scoperte già fatte ricevono il battesimo dell'utilità pratica, e che ad essi potranno in pari tempo fornire ottimo argomento di nuovi studi e nuove ricerche. D'altra parte è pur chiaro, che anche a questi ultimi Istituti il contatto coi primi, i cui risultati essi hanno continuamente da applicare, non potrà essere che di giovamento.

In secondo luogo poi basterà osservare che, mentre le Università ricevono dalle scuole secondarie i loro studenti, esse devono in pari tempo fornire a queste gli insegnanti, sicchè un buon accordo fra le une e le altre diventa, nonchè utile, quasi indispensabile. L'insegnante di Università che meglio conosca i bisogni delle scuole secondarie, meglio potrà addestrare i suoi studenti ad insegnare quivi un giorno; e l'insegnante di queste, al quale sia dato modo di mantenersi in rapporti colle Università, potrà più facilmente tener dietro ai progressi scientifici, e adempiere anche meglio al proprio ufficio.

Ciò posto, si potrebbe domandar come vanno le cose in Germania da questi due lati. In Italia, mentre le Università mantengono pur sempre rapporti più o meno stretti colle Scuole d'Applicazione per gli Ingegneri, esse vivono anche e prosperano senza quasi curarsi degli Istituti d'istruzione secondaria. In Germania invece avviene tutto il contrario, quanto al primo lato, si è ancora indietro; ma si è fatto e si fa molto dal secondo.

In Germania vi è oggi ancora separazione quasi assoluta fra le Università e gli Istituti Tecnici Superiori (*Technische Hochschulen*). Per quanto da tempo parecchio sia invalso l'uso di affidare in questi Istituti a scienziati insigni la cattedra di matematica, pure il fatto stesso che essi si trovano generalmente (con poche eccezioni, ad es. *Charlottenburg-Berlino* e *Monaco*) in città prive di altri Istituti Superiori contribuisce già non poco al loro isolamento; e solo in questi ultimi tempi si sono alzate alcune voci contro questo stato di cose. Mirabile esempio di fusione invece la Francia, dove i matematici più illustri del secolo sono tutti esciti dall' *École polytechnique!*

Ma molto avremmo invece da imparare dalla Germania per quanto si riferisce ai rapporti fra Istituti secondari e Superiori. In seguito a una disposizione del governo Prussiano ogni anno nelle vacanze Pasquali gli insegnanti di scuole secondarie sono invitati a riunirsi, quelli delle province orientali a Berlino, quelli delle province occidentali a Gottinga; e lì rimangono circa quindici giorni, a contatto degli insegnanti universitari. Conferenze e lezioni permettono da un lato ai numerosi convenuti di tenersi al corrente dei tanti e tanti progressi che la scienza

va continuamente facendo, mentre d'altra parte anche gli insegnanti di Università hanno modo di rendersi esatto conto dei bisogni e dei desideri dei primi. Le poche lezioni si aggirano naturalmente su quegli argomenti che più possono interessare i convenuti; così a Gottinga nell'anno corrente il prof. KLEIN ebbe a dimostrare che e e π non sono numeri algebrici; il prof. DRUDE riprodusse le ormai famose esperienze del compianto HERTZ; e altre lezioni tennero i professori di zoologia, botanica, ecc. (1),

***

Sui corsi tenuti quest'anno all'Università di Gottinga non mi tratterrò qui a lungo. — L'Università conta oggi tre professori ordinari di matematica; SCHERING, KLEIN, e WEBER. A questi sono da aggiungere VOIGT, professore di fisica matematica, e SCHUR, di astronomia; Direttori questi rispettivamente della sezione corrispondente del Gabinetto di fisica, e dell'Osservatorio astronomico. SCHERING è anche Direttore del *Gauss' erdmagnetisches Observatorium*, nel quale si fanno osservazioni e ricerche di magnetismo terrestre.

È professore straordinario SCHÖNFLIES. Liberi docenti durante l'anno 1893-94 erano FRICKE, ora professore alla Scuola Superiore di *Braunschweig;* BURKHARDT, e AMBRONN (*astronomia*). RITTER e BOHLMANN daranno principio al loro insegnamento solo l'inverno prossimo.

Dei due corsi del KLEIN sulla *funzione ipergeometrica* e sulle *equazioni differenziali lineari di* 2° *ordine*, il primo è già uscito, il secondo uscirà fra breve litografato. Al corso di *Geometria elementare* ho già accennato (in una nota); fu un corso interessante anche dal lato sto-

(1) Non sarà fuor di luogo il notare a questo punto, come in Germania già per parecchie vie si sia validamente affermata l'opportunità di non abbandonare gli insegnanti di scuole secondarie al loro destino e all'opera loro individuale, ma di riunirli a determinate epoche, per rinfrescare i loro ricordi scientifici, dai quali l'insegnamento che sono chiamati a impartire troppo spesso rimane discosto, e per allargare possibilmente la loro cultura, secondo lo richiedono i progressi della scienza. Con intendimenti così fatti sorse anche anni sono il *physikalischer Verein* di Francoforte s/m, che indice annualmente riunioni di insegnanti, e provvede a che ad essi siano tenute conferenze, lezioni sperimentali, ecc. E degli interessi generali, materiali e intellettuali, degli stessi insegnanti si occupa assai anche il *Verein zur Vörderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften,* che tenne quest'anno, nelle vacanze di Pentecoste, a *Wiesbaden* la sua terza adunanza generale.

rico, essendovisi fatta parola di matematici di tutti i tempi e di tutte le nazioni, dal vecchio AHMES — vissuto in Egitto ai tempi dei *Re pastori* (2000 a. A. C.?) — che ci lasciò il famoso *Papirus Rhind*, al russo ABDANK ABAKANOWICZ, al quale è dovuto l'*integrafo*, uno dei più recenti e importanti trovati (1) (2).

Fra gli altri corsi, ricorderò quelli del WEBER sui *numeri algebrici*. Nel primo semestre, introdotti i concetti di *numero algebrico* e di *corpo di numeri*, fu trattato principalmente il problema della scomposizione in fattori ideali secondo DEDEKIND. Nel semestre estivo fu oggetto speciale del corso la teoria corrispondente di KRONECKER (3).

Complemento importantissimo dei corsi sono le esercitazioni o *seminari*, che corrisponderebbero press'a poco alla nostra *Scuola di Magistero*, o meglio a ciò che quest'ultima era in talune nostre Università (p. e. a Torino) alcuni anni or sono (4). Un estratto dello Statuto del *mathematisch-physikalisches Seminar* è annesso allo *Studienplan*, di cui ho già parlato, e ne definisce lo scopo colle parole seguenti:

Die Aufgabe des Seminars ist, die Studierenden zur Selbstthätigkeit anzuregen, und sie in der Anwendung des in den Vorlesungen Gelernten zu unterweisen.

Questo scopo viene raggiunto mediante conferenze degli stessi insegnanti, o anche esercitazioni diverse da essi dirette e consistenti in lavori scritti e conferenze per parte degli studenti. Ciascuno dei diversi *Direttori* (RIECKE, SCHERING, VOIGT, KLEIN, SCHUR, WEBER) si

---

(1) *Es zeigt sich so unsere Wissenschaft erhaben über dem Wechsel der Zeit und der Nationalität.....*

(2) Gioverà forse insistere ancora sullo scopo principale di questo corso, già accennato di sopra: *Es handelte sich darum, ob durch die Fortschritte der Mathematik neues Licht über die elementaren Fragen welche den Lehrer interessieren (geometrische Constructionen, Quadratur des Kreises) geworfen ist, ob die moderne Mathematik nicht bloss Dinge für Specialisten behandelt, sondern auch Tragweite für elementare Fragen besitzt. Eine positive Auffassung in Bezug hierauf beigebracht zu haben, und dem Pessimismus, welcher den Werth der modernen Mathematik für die Allgemeinheit leugnet, entgegengetreten zu sein, mag der Hauptzweck dieser Vorlesung gewesen sein!*

(3) SCHERING tenne anche un corso di *teoria dei numeri;* SCHÖNFLIES di *geometria projettiva* e di *geometria infinitesimale*, VOIGT di *meccanica* e *teoria del potenziale;* ecc.

(4) Fino al 1889. Fu allora appunto che nuove disposizioni ministeriali le prefissero come scopo l'addestramento dei giovani all'insegnamento secondario.

attiene, a seconda dei casi, all'uno o all'altro sistema; e così mentre Klein, e a volte anche Weber, seguono quello delle conferenze tenute da studenti, e Voigt, non a torto, preferisce (nella sua materia) il sistema dei lavori scritti (problemi di meccanica, ecc.), Riecke va svolgendo invece qualche capitolo speciale di fisica (*ottica geometrica*, *esperienze di Hertz*, ecc.), e Schering e Schur iniziano gli studenti ai lavori nei rispettivi osservatorî.

Nel Seminario diretto dal Prof. Klein le conferenze ebbero, nell'inverno 1893-94, argomenti svariati, collegantisi però in parte colle lezioni sulla *funzione ipergeometrica* che lo stesso Klein andava allora dettando (1). Nell'estate successivo esse si aggirarono in gran parte sulle funzioni sferiche (*Kugelfunctionen*) e loro applicazioni nella fisica matematica (2).

Coloro che sono ascritti al Seminario possono anche usufruire, volendolo, della Sala di lettura (*Mathematisches Lesezimmer*) e relativa biblioteca. Scopo di questa istituzione è di mettere a disposizione degli studenti soprattutto quei libri e periodici che più frequentemente occorre di consultare; e appunto per non venir meno a questo scopo, e lasciare sempre tutto a disposizione di tutti, è assolutamente proibito darne i libri in prestito. Chi desidera avere a casa qualche volume può rivolgersi alla biblioteca generale (*Universitätsbibliothek*) che lo accorda senza difficoltà. Per l'uso della Sala di lettura è stabilita una tassa di *tre* marchi per semestre, e di *cinque* se si desidera avere un posto speciale

---

(1) Woods: *Ueber Minimalflächen;* Snyder: *Ueber Kugelgeometrie;* Furtwaengler: *Reduction der ganzzahligen ternären cubischen Formen.* Poi: Jaccottet: *Ueber assymptotische Ausdrücke von Functionen;* Lorey: *Convergenz und Divergenz der hypergeom. Reihe* F (a, b, c, x) *im Falle* x = 1; Sig^na^ Winston: *Die Zusammenhangsformeln für die Hauptzweige der P-Function;* Beke: *Ueber homogene lineare Differentialgleichungen, speciell über Analogien zwischen denselben und den algebraischen Gleichungen;* Sig^na^ Chisholm: *Ueber sphärische Trigonometrie, speciell über mögliche geometrische Deutungen der gewöhnlichen Gleichungen.....* Infine per parte dello stesso Prof. Klein: *Erklärung der Einrichtungen und Sammlungen von Lesezimmer und Modellkammer.*

(2) *Ganze rationale räumliche Kugelfunctionen; Kugelflächenfunctionen; Kugelfunctionen als Specialfälle der hypergeom. Function; Entwickelung einer willkürlichen Function des Ortes auf der Kugelfläche in eine Reihe nach Kugelfunctionen; Vergleich dieser Reihen mit Fourier'schen Reihen;...* E poi la parte storica: *Die Gaussische Theorie des Erdmagnetismus; die Laplace'sche Entwickelung nach Kugelfunctionen; die alten Untersuchungen von* Sturm *und* Liouville *über lin. Diffgleich. 2ter Ordnung;* ecc.

è fisso (con cassetto); nell'uno e nell'altro caso si ricevono le chiavi della sala, sicchè vi rimane libero l'accesso a tutte le ore del giorno. Nella sala sono raccolti anche i sunti (manoscritti o litografati) di parecchi corsi tenuti dal KLEIN, sopratutto in quest'ultimo decennio (credo anzi di tutti i corsi, dal 1884 in poi), nonchè quelli delle conferenze di seminario, redatti dagli stessi studenti che rispettivamente le hanno tenute. Fra i libri sinora raccolti e fra quelli che si vanno man mano acquistando hanno sempre una certa parte quelli che trattano di scienze applicate, e anche di matematiche elementari. E fra i nuovi acquisti hanno larga parte anche i periodici, specialmente tedeschi e francesi (di italiani, sgraziatamente, nessuno!) per un valore complessivo di ben 300 marchi all'anno.

***

Non sarà male forse ch'io chiuda queste poche pagine con qualche cenno sulla *vita che si vive* a Gottinga, i cui particolari potrebbero interessare qualcuno.

Ciò che Gottinga offre di più curioso e caratteristico è l'insieme di tutti gli stranieri quivi convenuti da ogni parte d'Europa e del mondo. L'Università, che non è certo in Germania tra le più frequentate, non conta più di 800 studenti, e fra questi quelli di matematica non sono in media che da venti a trenta. Ma gli stranieri, specialmente Inglesi e Americani, hanno in questo numero decisamente il sopravvento; e parecchi hanno anzi già conseguìto in patria titoli o gradi accademici, o almeno seguìto un corso completo di studi Universitari. Fra gli stranieri, coi quali ebbi la fortuna di imbattermi, mi piace ricordare il Prof. BEKE della *Staatsoberrealschule* di BUDAPEST, ritornato di propria volontà studente dopo non pochi anni di insegnamento; e oltre a lui ricorderò pure una gentile rappresentante della bionda Albione, figlia dell'*alma mater* CAMDRIDGE. Fra gli altri paesi d'Europa, vidi rappresentate la Francia e la Svizzera, la Danimarca e la Polonia. Numerosi poi gli Americani, di tutti gli Stati del Nord e del Sud, dell'Est e dell'Ovest; e fra questi anche altra signorina, A. B., proveniente dall'Università di WISCONSIN. Antichi scolari hanno anche a volte occasione di ripassare da Gottinga, e vi si trattengono più o meno lungamente; così p. es. nell'estate scorso vi rimase oltre un mese il Prof. OSGOOD dell' Università di CAMDRIDGE MASS., e alcuni giorni il Prof. BOLZA dell'Università di CHICAGO.

I buoni rapporti, e non solo fra studenti, ma anche fra studenti e insegnanti, sono cementati da riunioni extrauniversitarie (o almeno all'infuori dell'orario e delle lezioni regolamentari), nelle quali gli stessi

professori sono spesso ben lieti di sedere in mezzo ai loro studenti. Fra queste riunioni, che in Germania sono larga parte della vita scientifica, ricorderò quelle della *Mathematische Gesellschaft* e del *Mathematischer Verein*.

La fondazione della *Mathematische Gesellschaft* risale a circa due anni or sono. Ne sono membri tutti gli insegnanti di matematica e fisica, e, per di più, vi sono anche temporaneamente aggregati tutti coloro — più che altro stranieri — che hanno seguìto in una qualsiasi Università un corso completo di studi fisico-matematici. La società si riunisce, di solito, una volta per settimana; e uno dei membri o aggregati tiene una conferenza, su ricerche originali se ne ha argomento, o se no su altro, p. e. su qualche opera escita di recente, o su qualche complesso di lavori, dei quali egli si propone di dare agli altri notizia. Aggiungo qui in nota i titoli di alcune fra le conferenze tenute in questi ultimi due semestri (1).

***

Il *Matematischer Verein* è un'associazione di studenti, e come tale partecipa a molte fra le consuetudini, a volte tanto caratteristiche, di

---

(1) KLEIN: *Bericht über Amerikanishe Reise (Aug.-Sept. 1893); Ueber Fortscritte der functionentheor. Behandlung der Diffgleich. im letzten Jahrzehnt (lineare Differentialgleichungen u. Diffgleich. 1ter Ordnung); Ueber die in der Vorlesung üb. lineare Diffgl. bez. der Hermite'schen Gleichung gegebenen Entwickelungen;* FRICKE: *Ueb. ternäre u. quaternäre indefinite quadratische Formen; Ueb. Vorträge auf der Münchener Versammlung der D. Math. Ver.*; RITTER: *Ueb. den Beweis des Satzes: « Bei stetiger Aenderung eines Fundamentalbereiches mit linearer Kantenzuordnung ändern sich auch die zugehörigen automorphen Functionen stetig »*; FANO: *Ueb. die neuesten Untersuchungen der italienischen Geometer; Ueb. eigene Unters. im Geb. der Liniengeom.;* SOMMERFELD: *Ueb. die Methode der Hauptlösungen in der mathem. Physik; Ueb. Funct. reeller Veränd. welche durch part. Diffgl. definirt sind;* SCHÖNFLIES: *Ueb. Hexagonoide; Ueb. regelm. u. lückenlose Anordnung von Parallelepipeden;* BEKE: *Bemerkungen zur Picard-Vessiot'schen Theorie der lin. Diffgleich;* WEBER: *Ueb. algebraische Zahlen nach der Kronecker'schen Auffassung, und üb. die Beziehung der Kronecker'schen zur Dedekind'schen Theorie;* BURKHARDT: *Ueb. mathem. Unterricht in Frankreich; Ueb. neuere Resultate von Picard aus der Theorie der Diffgleich.;* HEEGARD: *Ueb. abzählende Geometrie* (nach Vorlesungen von Prof. *Zeuthen* in Kopenhagen im Jahre 1891); SCHILLING: *Ueb. den Fundamentalbereich der Schwarz'schen s- Function im Falle complexer Exponenten*; ecc.

queste stesse associazioni; notevole esempio del come scienza e divertimento possano stendersi la mano. Non è istituzione recente, chè anzi, dopo esser passato per vicende più o meno liete ed aver vista talora in pericolo la sua stessa esistenza, giunse poche settimane fa a celebrare felicemente il 25° anniversario della sua fondazione. E per il momento le sue sorti sembrano assicurate.

Dello Statuto di questo *Mathematischer Verein* riproduco qui i primi articoli:

§ 1. *Der « mathematische Verein zu Göttingen »..... hat zum Zweck, das gegenseitige Bekanntwerden der Mathematiker Göttingens zu vermitteln, sowie denselben Gelegenheit zu geben, sich im freien Vortrage und in Demonstrationen an der Wandtafel zu üben.*

§ 2. *Diesen Zweck sucht der Verein durch wöchentliche Versammlungen zu erreichen, die mit Ausnahme der gesetzlichen Ferien jeden Donnerstag Abend stattfinden und um 8 ¼ Uhr beginnen...*

§ 3. *Es ist wünschenswerth, dass die Mitglieder des Vereins nach Schluss des wissenschaftlichen und geschäftlichen Theiles des Abends sich zu geselligem Beisammensein vereinigen.*

Lo scopo dell'associazione è stabilito dal § 1, e sull'opportunità di raggiungerlo non ho bisogno di insistere. Le sedute di cui al § 2 hanno luogo regolarmente ogni settimana, e comprendono tre parti: *Geschäftlicher Theil*, *wissenschaftlicher Theil* e *gemüthlicher Theil*, quest'ultima in conformità del § 3.

La seconda parte (parte scientifica) consiste per lo più in una conferenza tenuta da qualche studente, su tema di libera scelta [1]. Non si può in queste conferenze pretendere gran cosa, perchè il più delle volte si tratta di studenti ancor giovani, ma per questi appunto esse costituiscono un ottimo esercizio. Quando nessuno si presenti per tenere la conferenza in una data sera, qualcuno dei più giovani (che non sono ancora alle prese cogli esami) può venirvi *comandato.*

A far parte del *Verein* sono ammessi tutti gli studenti regolarmente immatricolati, *in quanto già non appartengano a qualche altra associazione.* Ma alle sedute possono anche assistere, e assistono anzi assai di

---

[1] Talvolta anche da ex-soci (*Alte Herren*); p. e. Dr RITTER: *Ueber Grundbegriffe und Randbedingungen des logarithmischen Potentials;* Dr FELGENTRAEGER: *Ueb. moderne Fernrohrkonstructionen;* ecc. Ricorderò ancora i temi di alcune conferenze elementari dell'ultimo semestre: *Ueb. Systeme von linearen Gleichungen; Ueb. die Theorie der reciproken Polaren; Ueb. das Berührungsproblem des Apollonius; Ueb. Basisapparate; Ueb. Hygrometrie;.....*

spesso, coloro che già furono studenti e soci (*alte Herren*), e ora hanno raggiunto il grado di libero docente o talvolta di professore (e professore ordinario). È così appunto che si affermano vieppiù i cordiali rapporti fra studenti e insegnanti.

Il *Verein* possiede anche una biblioteca, dalla quale i soci possono avere libri in prestito.

Quanto al *gemüthlicher Theil*, non entrerò qui in dettagli, perchè non ne è il luogo, e troppi d'altra parte ce ne vorrebbero. Mi basti dire che la seduta è regolata dalla disciplina comune a tutte le associazioni di studenti, e che anche il *canto* vi ha larga parte (1) (2).

Queste riunioni, nelle quali prima si attende colla dovuta serietà alla parte scientifica, e poi tutti si dànno alla più gaia spensieratezza, sono veramente qualcosa di caratteristico e non si ritrovano, ch' io sappia, in nessun altro paese. Bello sarebbe invero il poterle introdurre anche fra noi, perchè sia pure (come lì avviene) col bicchiere alla mano, cultura e abilità didattica dei giovani studenti sempre ci guadagnano. Ma non è possibile imporre di qua delle Alpi, da un momento all'altro o in breve periodo di tempo, ciò che di là è consuetudine invalsa da secoli e tramandata di generazione in generazione!

Colognola ai Colli (Verona), settembre 1894.

---

(1) E una certa parte ha nel canto anche la scienza! Cfr. ad es. le *Mathem. Lieder* (*Der Pytagoreische Lehrsatz*, $R^2\pi$, *die Riemann'sche Fläche!.....*).

(2) Come associazione di studenti, il *mathem. Verein* appartiene, con altre quattro (*Classisch philologischer Verein, Akad. historischer Verein, Akad. theologischer Verein, Theol. Verein* CONCORDIA), al *Verband wissenschaftlicher Vereine*, che è uno dei tanti *gruppi* aventi diritto ad essere rappresentati nell'*Ausschuss der Studentschaft*.

Intorno ad alcune identità algebriche.

§ 1.

Nella raccolta di *formule di matematica* (*), pubblicate insieme col vol. III di questa *Rivista,* si trovano registrate nei nn. 62 e 63 della pagina 14, le identità

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5\,ab\,(a+b)\,(a^2+ab+b^2)$$
$$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7\,ab\,(a+b)\,(a^2+ab+b^2)^2$$

le quali dipendono, come casi particolari, dal già noto teorema:

Il polinomio $(a+b)^k - a^k - b^k$ *è divisibile per* a^2+ab+b^2 *quando* k *è della forma* $6\,t \pm 1$, *ed è divisibile per* $(a^2+ab+b^2)^2$ *quando* k *è della forma* $6\,t+1$.

Non so se fosse parimente conosciuta la verità del teorema analogo:

Il polinomio $(a+b)^k + a^k + b^k$ *è divisibile per* a^2+ab+b^2 *quando* k *è della forma* $6\,t \pm 2$, *ed è divisibile per* $(a^2+ab+b^2)^2$ *quando* k *è della forma* $6\,t-2$.

Sta nel fatto che non si trovano nella raccolta le identità

$$(a+b)^2 + a^2 + b^2 = 2\,(a^2+ab+b^2)$$
$$(a+b)^4 + a^4 + b^4 = 2\,(a^2+ab+b^2)^2$$
$$(a+b)^8 + a^8 + b^8 = 2\,(a^2+ab+b^2)\,(a^6 + 3\,a^5 b + 10\,a^4 b^2 + 15\,a^3 b^3 + 10\,a^2 b^4 + 3\,ab^5 + b^6)$$
$$(a+b)^{10} + a^{10} + b^{10} = (a^2+ab+b^2)^2\,(2\,a^6 + 6\,a^5 b + 27\,a^4 b^2 + 44\,a^3 b^3 + 27\,a^2 b^4 + 6\,ab^5 + 2\,b^6)\,,\ \text{ecc.}$$

che pure ne sono casi particolari.

È certo poi che, posto

$$\mathrm{D}_m = a^m + a^{m-1}\,b + \ldots + ab^{m-1} + b^m$$

(*) *Formulario di Matematica,* II, § 4, P 62, 63.

l'uno e l'altro dei teoremi sopraenunciati sono conseguenze dei due teoremi più generali:

I. *Il polinomio*

$$(1)\qquad (a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1})^k-a^{(m-1)k}-a^{(m-2)k}b^k-\ldots$$
$$-a^k b^{(m-2)k}-b^{(m-1)k}$$

è divisibile per D_m *se* k *è un numero dispari e primo con* $m+1$, *ed è divisibile per* D^2_m *se è inoltre* $k\equiv 1 \pmod{m+1}$.

II. *Il polinomio*

$$(2)\qquad (a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1})^k+a^{(m-1)k}+a^{(m-2)k}b^k+\ldots$$
$$+a^k b^{(m-2)k}+b^{(m-1)k}$$

è divisibile per D_m *se* k *è un numero pari e primo con* $m+1$, *ed è divisibile per* D^2_m *se è inoltre* $k\equiv 1 \pmod{m+1}$.

A questi teoremi dimostrati nella mia Nota intitolata: *Alcune proprietà dei coefficienti polinomiali*, ecc. (*), mi propongo di far qui un'aggiunta (**), determinando valori di n, minori di m, tali che

$$D_n=a^n+a^{n-1}b+\ldots+ab^{n-1}+b^n$$

sia un divisore dei polinomi (1) e (2).

§ 2.

Si premetta che quando $m+1$ è un multiplo di $n+1$, essendo $a^{m+1}-b^{m+1}$ divisibile per $a^{n+1}-b^{n+1}$, sarà altresì D_m multiplo di D_n, e quindi *i polinomi* (1) *e* (2) *ammetteranno siffatti divisori* D_n, *allorquando essi siano divisibili per* D_m.

Passando poi a considerare il caso particolare di $n=m-1$, e perciò

$$D_n=D_{m-1}=a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1},$$

è chiaro che, avendosi

$$(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1})^k\equiv 0 \pmod{D_{m-1}},$$

la condizione necessaria e sufficiente affinchè i polinomi (1) e (2) siano divisibili per D_{m-1} è espressa da:

$$a^{(m-1)k}+a^{(m-2)k}b^k+\ldots+a^k b^{(m-2)k}+b^{(m-1)k}\equiv 0 \pmod{D_{m-1}}.$$

Ma questa congruenza è soddisfatta soltanto quando k ed m sono

(*) *Giornale di Matematiche*. Vol. XXXI, pag. 119-136.

(**) Essa è contenuta nei §§ 2, 3 e 4. I rimanenti paragrafi sono dedicati allo studio di altre identità.

primi fra loro, e perciò *se si avvera questa condizione, ambedue i polinomi* (1) *e* (2) *saranno divisibili per* D_{m-1}.

A ciò devesi, per esempio, che nel caso speciale di $m = 2$, se k è un numero dispari, i polinomi $(a+b)^k - a^k - b^k$ e $(a+b)^k + a^k + b^k$ sono ambedue divisibili per $a+b$. E così si ha, ad un tempo:

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3\,ab\,(a+b)$$
$$(a+b)^3 + a^3 + b^3 = (a+b)\,(2\,a^2 + ab + 2\,b^2)$$

ed, insieme colle due identità citate in principio del § 1, si ha pure

$$(a+b)^5 + a^5 + b^5 = (a+b)\,(2\,a^4 + 3\,a^3 b + 7\,a^2 b^2 + 3\,ab^3 + 2\,b^4)$$
$$(a+b)^7 + a^7 + b^7 = (a+b)\,(2\,a^6 + 5\,a^5 b + 16\,a^4 b^2 + 19\,a^3 b^3 + 16\,a^2 b^4 + 5\,ab^5 + 2\,b^6)\,.$$

Ma se si vuole che il polinomio (1) o il polinomio (2) ammettano il divisore D_{m-1}, *insieme col divisore* D_m, ossia (essendo D_m e D_{m-1} primi fra loro) se si vuole che l'uno o l'altro dei polinomi (1) e (2) siano divisibili per il prodotto $D_{m-1}\,D_m$, allora, ricordando che affinchè il polinomio (1) sia divisibile per D_m, il numero k dev'essere dispari e primo con $m+1$, si giunge alla seguente conclusione:

Il polinomio (1) *è divisibile per il prodotto* $D_{m-1}\,D_m$ *solamente quando* k *è un numero dispari e primo coi numeri* m *ed* $m+1$.

Al contrario, poichè il polinomio (2) è divisibile per D_m se k è un numero pari e primo con $m+1$, ne consegue che $m+1$ dev'essere dispari ed m pari; e quindi è impossibile che k ed m siano primi fra loro. Dunque:

Il polinomio (2) *non è mai divisibile per il prodotto* $D_{m-1}\,D_m$.

Ciò concorda, nel caso di $m = 2$, colle identità notate nel § precedente, nelle quali si trovano divisibili per $(a+b)\,(a^2+ab+b^2)$ i soli polinomi della forma $(a+b)^k - a^k - b^k$.

È altresì facile stabilire che solamente il polinomio (1) è divisibile per i fattori a, b ed $a+b$.

Esempio. — Se si pone $m = 4$ e $k = 3$, il numero k è certamente primo con m ed $m+1$, e perciò il polinomio

$$(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)^3 - a^9 - a^6 b^3 - a^3 b^6 - b^9$$

è divisibile per il prodotto $D_3\,D_4$. Effettivamente si trova

$$(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)^3 - a^9 - a^6 b^3 - a^3 b^6 - b^9 =$$
$$3\,ab\,(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)\,(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4) =$$
$$3\,ab\,(a+b)\,(a^2+b^2)\,(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)\,.$$

Il fattore $a+b$ che, come è stato osservato, deve sempre appartenere al polinomio (1) è, in questo caso, un divisore del fattore $a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3$.

§ 3.

L'esistenza di altri valori di n, per i quali tanto il polinomio (1) quanto il polinomio (2) sono divisibili per D_n, è resa manifesta dal seguente teorema:

Se $n+1$ è un numero primo con k, ed è un divisore di m o di $m+1$ (*), il polinomio (1) *o il polinomio* (2), *secondochè k è dispari o pari, è divisibile per* D_n.

Il polinomio (1) *è divisibile per D_n, anche se $n+1$ è primo con k, ed è un divisore di $m-1$.*

Infatti, indicando con q e r il quoziente e il resto della divisione di $m-1$ per $n+1$, sarà

$$m-1=(n+1)q+r\,,\ \text{con } r<n+1$$

e mediante i principii fondamentali delle congruenze non è difficile riconoscere che si ha, rispetto al modulo D_n

$$a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}\equiv b^{(n+1)q}(a^r+a^{r-1}b+\ldots+ab^{r-1}+b^r)\,,$$

dalla quale si trae

$$(3)\qquad (a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1})^k\equiv b^{(n+1)qk}(a^r+a^{r-1}b+\ldots+ab^{r-1}+b^r)^k\,.$$

Così pure si trova

$$a^{(m-1)k}+a^{(m-2)k}b^k+\ldots+a^k b^{(m-2)k}+b^{(m-1)k}\equiv b^{(n+1)qk}(a^{rk}+a^{(r-1)k}b^k+\ldots+a^k b^{(r-1)k}+b^{rk})+qb^{[(n+1)(q-1)+r+1]k}(a^{nk}+a^{(n-1)k}b^k+\ldots+a^k b^{(n-1)k}+b^{nk})\,.$$

Ora, essendo per ipotesi $n+1$ primo con k, e quindi

$$a^{nk}+a^{(n-1)k}+\ldots+a^k b^{(n-1)k}+b^{nk}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ D_n)$$

l'ultima congruenza si semplifica e diviene

$$(4)\qquad a^{(m-1)k}+a^{(m-2)k}b^k+\ldots+b^{(m-1)k}\equiv b^{(n+1)qk}(a^{rk}+a^{(r-1)k}b^k+\ldots+b^{rk})\,.$$

In virtù di questa congruenza e della (3), i polinomi (1) e (2) ammetteranno il divisore D_n, se saranno divisibili per D_n, rispettivamente, i polinomi:

(*) Il caso di $n+1$ divisore di $m+1$, non si ridurrà *sempre* a quello considerato nel principio del § 2, perchè ora non viene affatto supposto che i polinomi (1) e (2) siano divisibili *anche* per D_m.

(5) $(a^r + a^{r-1}b + \ldots + ab^{r-1} + b^r)^k - a^{rk} - a^{(r-1)k}b^k - \ldots - a^k b^{(r-1)k} - b^{rk}$

(6) $(a^r + a^{r-1}b + \ldots + ab^{r-1} + b^r)^k + a^{rk} + a^{(r-1)k}b^k + \ldots + a^k b^{(r-1)k} + b^{rk}$.

Dovendo esser $r < n+1$, si vede subito che si può prendere:

1°) $r = n$, perchè le due parti $(a^r + a^{r-1}b + \ldots + ab^{r-1} + b^r)^k$ e $\mp(a^{rk} + a^{(r-1)k}b^k + \ldots + b^{rk})$ che costituiscono i polinomi (5) e (6) risultano separatamente divisibili per D_n.

2°) $r = n-1$, perchè in questo caso la divisibilità dei polinomi (5) e (6) per D_n è provata dai teoremi I e II del § 1, sostituendovi ad m il numero n.

Le condizioni $r = n$, $r = n-1$, trasformano l'eguaglianza $m-1 = (n+1)q + r$, rispettivamente in $m = (n+1)(q+1)$ ed $m+1 = (n+1)(q+1)$, e queste indicano appunto che $n+1$ *è un divisore di* m *o di* $m+1$, in conformità della prima parte del teorema enunciato.

Supponendo invece $r = 0$, e quindi $m-1 = (n+1)q$, ossia $n+1$ *divisore di* $m-1$, si verifica facilmente che i secondi membri delle congruenze (3) e (4) si riducono eguali a $b^{(n+1)qk}$, onde può dirsi che, per $r = 0$, soltanto il polinomio (5) si annulla o è divisibile per D_n; e così è dimostrata anche la seconda parte del teorema.

§ 4.

Facendo uso di un teorema ausiliario dimostrato nella Nota già citata (*) si giunge a provare:

1°) *Che i polinomi* (1) *e* (2) *non sono mai divisibili per* D_n^2, *se* $n = m-1$.

2°) *Che essi sono divisibili per* D_n^2, *se* $n+1$ *è primo con* k *ed è divisore di* $m+1$, *purchè sia inoltre* $k \equiv 1 \pmod{n+1}$.

3°) *Che essi non sono mai divisibili per* D_n^2, *se* $n+1$ *è primo con* k *ed è divisore di* m.

4°) *Che il solo polinomio* (1) *è divisibile per* D_n^2, *se* $n+1$ *è primo con* k *ed è un divisore di* $m-1$, *purchè sia altresì* $k \equiv 1 \pmod{n+1}$.

La dimostrazione di queste proprietà è analoga a quella da me fatta per riconoscere la divisibilità dei polinomi (1) e (2) per D^2_m, e può perciò essere tralasciata (**).

(*) V. *Giornale di Matematiche*, vol. XXXI, pag. 124.

(**) Non è neppur necessario l'intrattenersi sulle altre proprietà che i

Non sarà inutile, invece, il verificare sopra alcuni esempi tutti i risultati fin qui ottenuti.

Esempio 1°. — Per i valori di $m = 4$ e $k = 7$, il polinomio (1) diviene

$$D_3^7 - a^{21} - a^{14} b^7 - a^7 b^{14} - b^{21}.$$

Si riconosce, come nell'esempio dato alla fine del § 2, che questo polinomio è divisibile per il prodotto $D_3 D_4$, e dalla seconda parte del teorema dimostrato nel § precedente, osservando che per $n = 2$ si ha che $n + 1$ è divisore di $m - 1$, si deduce che il polinomio stesso è divisibile anche per D_2. Infine dall'essere $7 \equiv 1 \pmod 3$ si conclude che il polinomio dev'essere divisibile anche per D_2^2. E si verifica, infatti, che si ha:

$$D_3^7 - a^{21} - a^{14} b^7 - a^7 b^{14} - b^{21} = 7\, ab\, D_2^2\, D_3\, D_4\, (a^8 + 2\, a^6 b^2 + 3\, a^5 b^3 + a^4 b^4 + 3\, a^3 b^5 + 2\, a^2 b^6 + b^8).$$

Anche in questo caso il divisore $a + b$ del polinomio è incluso in D_3.

Esempio 2°. — Ponendo $m = 6$ e $k = 4$, il polinomio (2) si riduce a

$$D_5^4 + a^{20} + a^{16} b^4 + a^{12} b^8 + a^8 b^{12} + a^4 b^{16} + b^{20}.$$

Esso, in virtù del teorema II (§ 1) è divisibile per D_6, ma non per D_6^2. Supposto $n = 2$, il numero $n + 1 = 3$ è primo con $k = 4$, ed è divisore di $m = 6$, onde, come risulta dalla prima parte del teorema del § 3, il polinomio dev'essere divisibile anche per D_2; ma, per la terza delle proprietà sopraenunciate, non può ammettere il fattore D_2^2. Così si trova:

$$D_5^4 + a^{20} + a^{16} b^4 + a^{12} b^8 + a^8 b^{12} + a^4 b^{16} + b^{20} = 2\, D_2\, D_6\, (a^{12} + 2\, a^{10} b^3 + 3\, a^9 b^3 + 3\, a^8 b^4 + 4\, a^7 b^5 + 5\, a^6 b^6 + 4\, a^5 b^7 + 3\, a^4 b^8 + 3\, a^3 b^9 + 2\, a^2 b^{10} + b^{12}).$$

Esempio 3°. — Se si suppone $m = 5$ e $k = 4$, il polinomio (2) diventa

$$D_4^4 + a^{16} + a^{12} b^4 + a^8 b^8 + a^4 b^{12} + b^{16}.$$

Essendo k ed m, in tal caso, primi fra loro, il polinomio è divisibile (§ 2) per D_4. E dalla prima parte del teorema del § 3 si rileva altresì che il polinomio dev'essere divisibile per D_2, perchè, con $n=2$,

---

coefficienti polinomiali, indicati nella stessa Nota con $k_n^{(m)}$, vengono ad acquistare per la presenza dei divisori D_n e D^2_n nei polinomi (1) e (2), perchè esse sono conseguenze immediate dei teoremi generali ivi stabiliti. (v. l. c. pag. 128 e pag. 134 e 135).

si ha che $n+1$ è un divisore di $m+1=6$. Il polinomio è divisibile altresì per D_2^2 poichè si ha $4 \equiv 1 \pmod 3$. Sussiste infatti l'uguaglianza

$$D_4^4 + a^{16} + a^{12} b^4 + a^8 b^8 + a^4 b^{12} + b^{16} = 2 D_2^2 D_4 (a^8 - a^7 b + 2 a^6 b^2 + 2 a^5 b^3 - a^4 b^4 + 2 a^3 b^5 + 2 a^2 b^6 - a b^7 + b^8).$$

§ 5.

Un'altra formula suscettibile di estensione, trovasi nella medesima pag. 14 della raccolta al n° 60. Essa è

$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

Ed invero, poichè si ha identicamente

$$a^{2(m+1)} - b^{2(m+1)} = (a^{m+1} - b^{m+1})(a^{m+1} + b^{m+1})$$

si potrà, supponendo che $m+1$ sia un numero dispari, dividere il primo membro di questa eguaglianza per $a^2 - b^2$, e i due fattori del secondo membro per $a-b$ ed $a+b$, rispettivamente, dando luogo all'identità:

$$(7) \qquad a^{2m} + a^{2(m-1)} b^2 + a^{2(m-2)} b^4 + \ldots + a^2 b^{2(m-1)} + b^{2m} = (a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \ldots + ab^{m-1} + b^m)(a^m - a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 - \ldots - a b^{m-1} + b^m)$$

la quale si riduce a quella surriferita nel caso di $m=2$.

Aggiungasi poi che il primo membro della (7) è della forma

$$(8) \qquad a^{mk} + a^{(m-1)k} b^k + a^{(m-2)k} b^{2k} + \ldots + a^k b^{(m-1)k} + b^{mk}$$

e, come si sa, questo polinomio è divisibile per

$$(9) \qquad a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \ldots + ab^{m-1} + b^m$$

quando k ed $m+1$ sono numeri primi fra loro. Se ora si fa l'ipotesi che k sia pari (ciò che assoggetta $m+1$ alla condizione di essere un numero dispari, affinchè possa essere primo con k), è evidente che il polinomio (8) non cambia col sostituirvi $-b$ in luogo di b. Esso pertanto dev'essere divisibile per

$$(10) \qquad a^m - a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 - \ldots - ab^{m-1} + b^m$$

che è il polinomio in cui si trasforma il (9) colla stessa sostituzione. E poichè i polinomi (9) e (10) sono primi fra loro, ne segue che il polinomio (8) è divisibile anche per il loro prodotto. È adunque chiaro che il teorema espresso dalla (7) è un caso particolare del seguente:

Se m è pari e k è un numero pari e primo con $m+1$, il polinomio (8) *è divisibile per il prodotto dei polinomi* (9) *e* (10) (*).

(*) Questo teorema è analogo ad altri dimostrati nella mia Nota: *Sulla divisibilità dei polinomi*, ecc., v. *Periodico di matematica*, anno VI.

§ 6.

Alla formula (7), in cui m è per ipotesi un numero pari, fa riscontro un'altra per il caso in cui m è dispari. Essa può essere stabilita elementarmente nel seguente modo.

Ammesso che $m+1$ sia un numero pari, si ha

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a^2-b^2}=a^{m-1}+a^{m-3}b^2+a^{m-5}b^4+\ldots+a^2b^{m-3}+b^{m-1}$$

da cui

$$\frac{(a^{m+1}-b^{m+1})^2}{a^2-b^2}=(a^{m-1}+a^{m-3}b^2+\ldots+a^2b^{m-3}+b^{m-1})(a^{m+1}-b^{m+1})=a^{2m}+a^{2(m-1)}b^2+\ldots+a^{m+1}b^{m-1}-a^{m-1}b^{m+1}-\ldots-a^2b^{2(m-1)}-b^{2m}.$$

Ma si ha d'altronde

$$\frac{(a^{m+1}-b^{m+1})^2}{a^2-b^2}=\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}\cdot\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a+b}=(a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots+ab^{m-1}+b^m)(a^m-a^{m-1}b+a^{m-2}b^2-\ldots+ab^{m-1}-b^m)$$

e perciò

$$(11)\qquad a^{2m}+a^{2(m-1)}b^2+\ldots+a^{m+1}b^{m-1}-a^{m-1}b^{m+1}-\ldots-a^2b^{2(m-1)}-b^{2m}=(a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots+ab^{m-1}+b^m)(a^m-a^{m-1}b+a^{m-2}b^2-\ldots+ab^{m-1}-b^m).$$

La formula $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, che corrisponde ad $m=1$, è il solo caso particolare della (11) che trovasi notato nella raccolta; mentre se, per esempio, si fa $m=3$ vi si trae

$$a^6+a^4b^2-a^2b^4-b^6=(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$$

ed altre simili se ne trarrebbero facendo percorrere ad m la serie dei numeri dispari.

Si osservi ancora che il primo membro della (11) è della forma

$$(12)\qquad a^{mk}+a^{(m-1)k}b^k+\ldots+a^{\frac{(m+1)k}{2}}b^{\frac{(m-1)k}{2}}-a^{\frac{(m-1)k}{2}}b^{\frac{(m+1)k}{2}}-\ldots-a^kb^{(m-1)k}-b^{mk}$$

e che in questo polinomio (sempre supposto che m sia dispari) i primi $\frac{m+1}{2}$ termini sono positivi e gli $\frac{m+1}{2}$ termini rimanenti sono negativi. Raggruppando il termine $(n+1)^{esimo}$ positivo col termine $(n+1)^{esimo}$ negativo, può porsi, evidentemente

$$a^{(m-n)k}\,b^{nk}-a^{\frac{(m-2n-1)k}{2}}\,b^{\frac{(m+2n+1)k}{2}}=a^{\frac{(m-2n-1)k}{2}}\,b^{nk}\left(a^{\frac{(m+1)k}{2}}-b^{\frac{(m+1)k}{2}}\right)$$

laonde, facendo inoltre l'ipotesi che k sia un numero pari, ne viene di conseguenza che *il polinomio* (12) *è divisibile per* $a^{m+1}-b^{m+1}$. Da questo si deduce che il polinomio è divisibile tanto per

$$(13)\qquad a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots+ab^{m-1}+b^m$$

quanto per

$$(14)\qquad a^m-a^{m-1}b+a^{m-2}b^2-\ldots+ab^{m-1}-b^m$$

perchè questi polinomi sono ambedue divisori di $a^{m+1}-b^{m+1}$. Ma non se ne può concludere che il polinomio (12) sia divisibile anche per il loro prodotto, perchè i polinomi (13) e (14) non sono primi fra loro. Ciò nonostante la divisibilità del polinomio (12) per il prodotto dei polinomi (13) e (14) può essere riconosciuta, dimostrando che il polinomio (12), moltiplicato per a^2-b^2, oltre al rimanere divisibile per $a^{m+1}-b^{m+1}$, diviene divisibile anche per $(a^{m+1}-b^{m+1})^2$. Vi si giunge, senza difficoltà, mediante il teorema ausiliario di cui è stato parlato al principio del § 4; e così, in conclusione, può dirsi che la (11) è contenuta come caso particolare nel teorema:

Se m è dispari e k è un numero pari, il polinomio (12) *è divisibile per il prodotto dei polinomi* (13) *e* (14).

ELCIA SADUN.

Nuove pubblicazioni.

F. Castellano. — *Lezioni di Meccanica razionale.* Torino, tip. Candelletti, 1894, pag. 512; prezzo L. 12.

F. Porro. — *Astronomia sferica elementarmente esposta.* Pag. XIII+136, Roma, Società editrice Dante Alighieri, prezzo L. 4.

E. Cesàro. — *Introduzione alla teoria matematica della elasticità.* Pag. 214, Torino, Bocca, 1894, prezzo L. 6.

X. Antomari. — *Cours de Mécanique à l'usage des candidats à l'École militaire de Saint-Cyr.* Pag. 268, Paris, Nony et C^ie^, 1895.

X. Antomari et C. A. Laisant. — *Questions de Mécanique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales.* Pag. 224, Paris, Nony et C^ie^, 1895.

Jules Tannery. — *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure,* par E. Borel et J. Drach. Pag. 10+350, Paris, Nony et C^ie^, 1895.

A. Capelli. — *Lezioni di Algebra complementare, ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria.* Pag. XII+526, Napoli, B. Pellerano, 1895, prezzo L. 8.

Fine del Volume IV
